

3. LES CIRCUITS LINÉAIRES EN RÉGIME SINUSOÏDAL

JEAN-MICHEL SALLESE

LES CIRCUITS LINÉAIRES EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Signaux sinusoïdaux et phaseurs complexes

Impédance des dipôles linéaires en régime sinus

Analyse fréquentielle

Quadripôle linéaire et fonction de transfert

Les Diagrammes de Bode

Lien entre analyses temporelles et fréquentielles

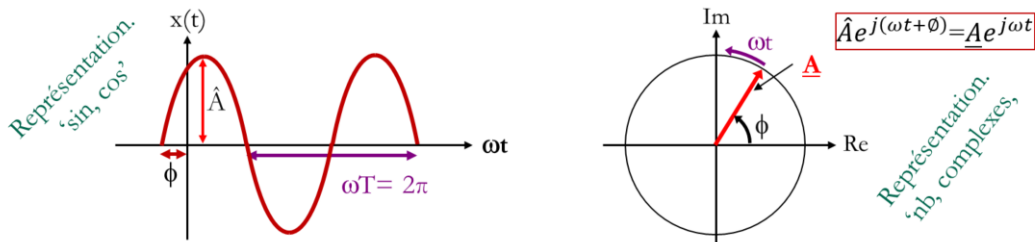
SINUS ET PHASEURS

Base mathématique: $e^{j\alpha} = \cos\alpha + j \cdot \sin\alpha$ $j = \sqrt{-1}$

$$\hat{A}e^{j(\omega t + \phi)} = \hat{A}(\cos(\omega t + \phi) + j\sin(\omega t + \phi)) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{A}\cos(\omega t + \phi) = \text{Re}(\hat{A}e^{j(\omega t + \phi)}) \\ \hat{A}\sin(\omega t + \phi) = \text{Im}(\hat{A}e^{j(\omega t + \phi)}) \end{array} \right.$$

Un signal sinus d'amplitude $\hat{A}$, de phase initiale ϕ et de pulsation ω ($\hat{A}e^{j(\omega t + \phi)}$) peut être décrit par un **phaseur complexe** $\underline{A}$ d'amplitude $\hat{A}$ et d'argument ϕ , $\underline{A} = \hat{A}e^{j\phi}$, tournant à la vitesse angulaire ω : $\hat{A}e^{j(\omega t + \phi)} = \underline{A}e^{j\omega t}$.

$$\hat{A}\cos(\omega t + \phi) = \text{Re}(\underline{A}e^{j\omega t}) \quad \hat{A}\sin(\omega t + \phi) = \text{Im}(\underline{A}e^{j\omega t})$$



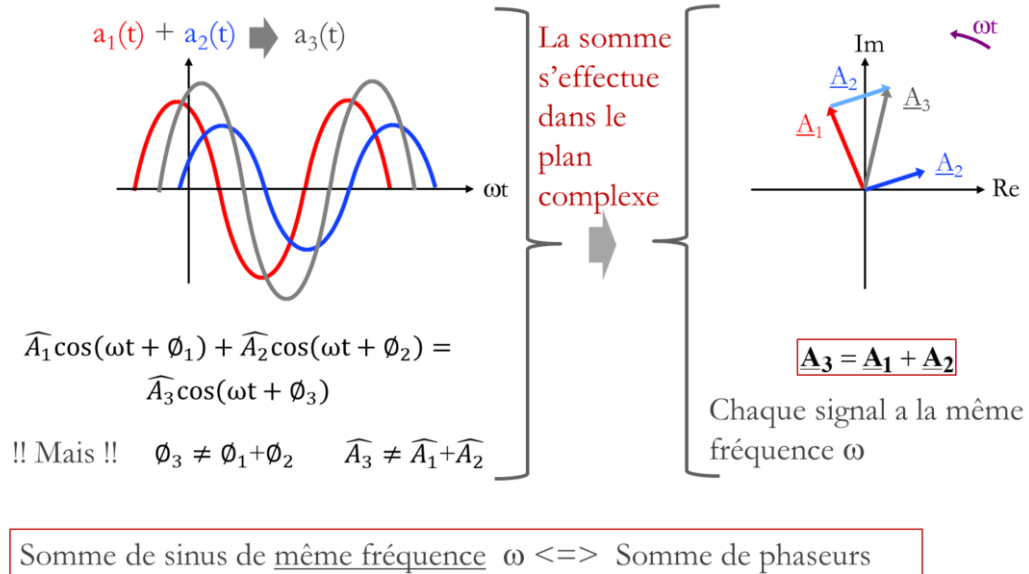
Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 3

La représentation du phaseur $\underline{A} = \hat{A} \exp(j\phi)$ est le nombre complexe qui représente le signal au temps initial ($t=0$).

$\hat{A}$ indique l'amplitude (valeur de crête du sinus) et ϕ est la phase initiale du sinus lorsque $t=0$

Par convention le phaseur tourne dans le **sens anti-horaire** à la vitesse angulaire ω .

SINUS ET PHASEURS: SOMMES



Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 4

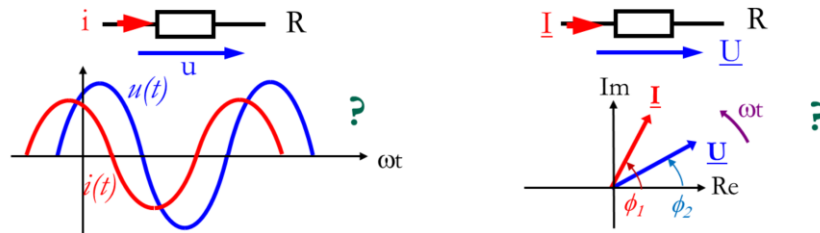
La vitesse angulaire ω est toujours dans le sens anti-horaire.

Rappel:

Additionner des phaseurs ou des nombres complexes revient à additionner les parties réelles entre elles, et les parties imaginaires entre elles.

Attention, les 'phases' ne se somment pas !

DIPÔLES LINÉAIRES EN RÉGIME SINUS: LA RÉSISTANCE



Excitation: $i(t) = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_1)$ $\Rightarrow$ Réponse ? $u(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi_2)$

$$u(t) = R i(t) = R \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_1) = R \operatorname{Im}[\hat{I} e^{j(\omega t + \varphi_1)}] = \operatorname{Im}[R \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi_1)}]$$

$$= \operatorname{Im}[R \underline{I} e^{j\omega t}] = (R \underline{I} e^{j\omega t} - R \underline{I}^* e^{-j\omega t}) / 2j \quad (\underline{I} = \hat{I} e^{j\varphi_1})$$

Par ailleurs, la tension peut aussi s'écrire de façon générale (notons que les phases ne sont pas forcément identiques):

$$u(t) = \operatorname{Im}[\hat{U} e^{j(\omega t + \varphi_2)}] = \operatorname{Im}[\underline{U} e^{j\omega t}] = (\underline{U} e^{j\omega t} - \underline{U}^* e^{-j\omega t}) / 2j \quad (\underline{U} = \hat{U} e^{j\varphi_2})$$

Nous allons établir une expression équivalente à la loi d'Ohm dans le cas d'une résistance soumise à une tension sinusoïdale.

Dans l'exemple ci-dessus, le courant est donné. Il s'agit de trouver la tension $u(t)$. Comme les variables sont des nombres complexes, il faudra déterminer à la fois le module et la phase (ici, $\underline{U}$ et ϕ_2).

Remarque: on peut montrer que dans le cas de circuits dits 'linéaires', si l'excitation est périodique de fréquence angulaire ω , alors les réponses (en courant, tension, charge) seront également périodiques de même fréquence angulaire ω . C'est la raison pour laquelle la même fréquence angulaire est imposée à la tension $u(t)$.

Par contre, il peut exister une différence de phase entre ces signaux (ϕ_1, ϕ_2).

Nous verrons qu'une telle différence de phase va dépendre des composants et aussi de la fréquence d'excitation ω lorsque ces composants sont associés dans des circuits.

DIPÔLES LINÉAIRES EN RÉGIME SINUS: LA RÉSISTANCE

L'égalité entre les expressions donne:

$$(R\underline{I}e^{j\omega t} - R\underline{I}^*e^{-j\omega t}) = (\underline{U}e^{j\omega t} - \underline{U}^*e^{-j\omega t}) \quad \Rightarrow \quad (R\underline{I} - \underline{U})e^{j\omega t} = (R\underline{I}^* - \underline{U}^*)e^{-j\omega t}$$

Ces 2 expressions doivent être identiques quelque soit t , ce qui implique que les termes indépendants du temps doivent être nuls.

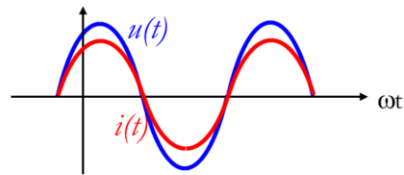
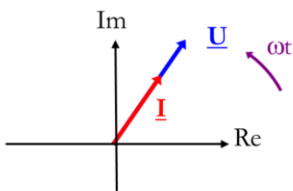
$$\underline{U} = R\underline{I}$$

La relation entre les phaseurs ne dépend pas de la fréquence pour la résistance

Pour la résistance, la relation entre courant et tension en régime sinusoïdal est donc:

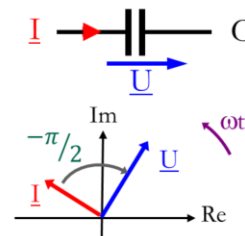
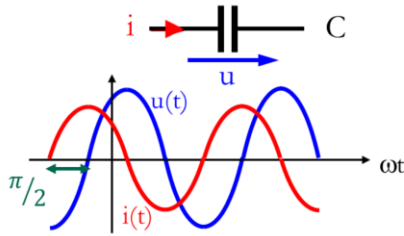
$$\underline{U} = R\underline{I}$$

$$u(t) = \hat{U} \sin(\omega t) \quad i(t) = \frac{\hat{U}}{R} \sin(\omega t)$$



Pour une résistance, le courant et la tension sont toujours en phase.

DIPÔLES LINÉAIRES EN RÉGIME SINUS LE CONDENSATEUR



$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{1}{C} \int \text{Im}[\hat{I}e^{j(\omega t + \varphi_1)}] dt = \frac{1}{C} \text{Im} \int [\hat{I}e^{j(\omega t + \varphi_1)}] dt = \text{Im} \left(\frac{\hat{I}}{j\omega C} e^{j\omega t} \right)$$

$$u(t) = \text{Im} \left(\frac{\hat{I}}{j\omega C} e^{j\omega t} \right) = \left(\frac{\hat{I}}{j\omega C} e^{j\omega t} - \frac{j\hat{I}^*}{\omega C} e^{-j\omega t} \right) \frac{1}{2j}$$

mais aussi:

$$u(t) = \text{Im}[\hat{U}e^{j(\omega t + \varphi_2)}] = \text{Im}[\underline{U}e^{j\omega t}] = \left(\underline{U}e^{j\omega t} - \underline{U}^*e^{-j\omega t} \right) \frac{1}{2j}$$

$$\forall t \Rightarrow \boxed{\underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \underline{I}}$$

$$\underline{U} = \frac{-j}{\omega C} \underline{I} = \frac{e^{-j\pi/2}}{\omega C} \underline{I}$$

Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 7

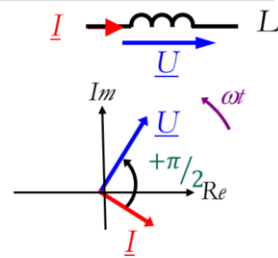
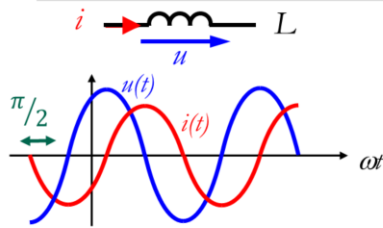
Dans une capacité, le phaseur courant et le phaseur tension ne sont plus en phase (contrairement à la résistance).

Un déphasage de -90° existe entre u et i .

Selon le plan complexe, on voit que 'le courant est en avance sur la tension'.

Ceci vient du fait que le courant est obtenu par dérivée temporelle de la tension.

DIPÔLES LINÉAIRES EN RÉGIME SINUS L' INDUCTANCE



$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{d \operatorname{Im}[\hat{I} e^{j(\omega t + \varphi_1)}]}{dt} = L \operatorname{Im} \frac{d[\hat{I} e^{j(\omega t + \varphi_1)}]}{dt} = L \operatorname{Im} \frac{d[\underline{I} e^{j\omega t}]}{dt} = \operatorname{Im}[j \omega L \underline{I} e^{j\omega t}]$$

$$u(t) = \operatorname{Im}(j \omega L \underline{I} e^{j\omega t}) = (j \omega L \underline{I} e^{j\omega t} + j \omega L \underline{I}^* e^{-j\omega t}) \frac{1}{2j}$$

mais aussi:

$$u(t) = \operatorname{Im}[\hat{U} e^{j(\omega t + \varphi_2)}] = \operatorname{Im}[\underline{U} e^{j\omega t}] = (\underline{U} e^{j\omega t} - \underline{U}^* e^{-j\omega t}) \frac{1}{2j}$$

$$\forall t \quad \boxed{\underline{U} = j \omega L \underline{I}}$$

$$\underline{U} = e^{j\pi/2} \omega L \underline{I}$$

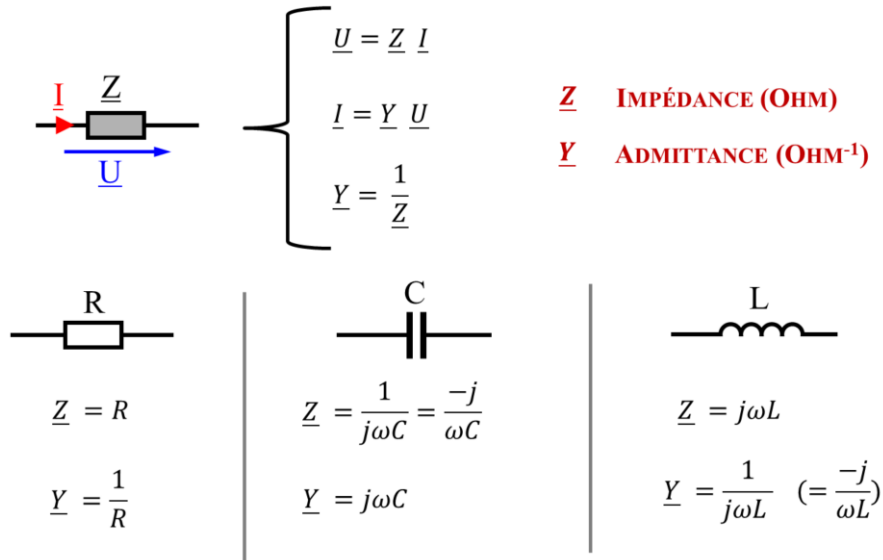
Comme pour la capacité, dans une inductance, le phaseur courant et le phaseur tension ne sont plus en phase.

Cette fois, un déphasage de 90° existe entre u et i .

Selon le plan complexe, on voit que 'le courant est en retard sur la tension'.

Ici, c'est la tension qui s'obtient par la dérivée temporelle du courant.

DIPÔLES LINÉAIRES EN RÉGIME SINUS IMPÉDANCES $\underline{Z}$ ET ADMITTANCES $\underline{Y}$



Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 9

En notation complexe, pour les trois types de dipôles linéaires passifs, la loi d'Ohm s'écrit en terme de phaseurs $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$.

Le paramètre $\underline{Z}$ est appelé impédance.

Son inverse $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ est appelé admittance.

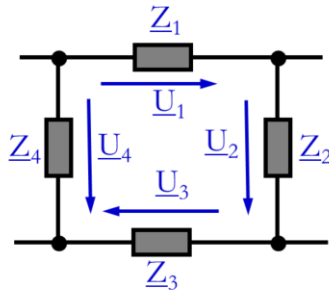
L'impédance d'une résistance est réelle positive.

L'impédance d'une inductance est purement imaginaire positive.

L'impédance d'une capacité est purement imaginaire négative.

DIPÔLES LINÉAIRES EN RÉGIME SINUS LOIS DE KIRCHHOFF ET PHASEURS

Les lois de Kirchhoff restent valables

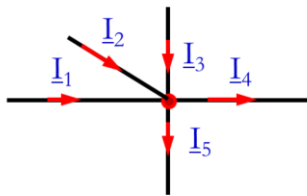


Loi des mailles

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 - \underline{U}_4 = 0$$

Attention aux signes (sens des flèches) !

Attention **somme complexe** !



Loi des noeuds

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 - \underline{I}_4 - \underline{I}_5 = 0$$

Attention aux signes (sens des flèches) !

Attention **somme complexe** !

Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 10

Loi des mailles:

Le long d'un trajet fermé, la **somme complexe** des phaseurs de tension est nulle.

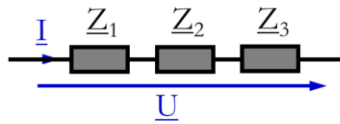
Loi des noeuds:

La **somme complexe** des phaseurs de courant qui arrivent en un noeud est nulle.

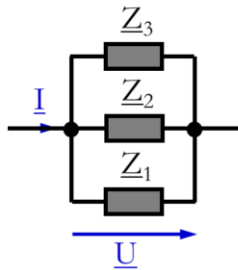
Rappel:

Si une somme de grandeurs complexes est nulle, la somme des parties réelles est nulle, de même que la somme des parties imaginaires.

DIPÔLES LINÉAIRES EN RÉGIME SINUS IMPÉDANCES EN SÉRIE ET EN PARALLÈLE



$$\underline{Z}_{eq,série} = \sum \underline{Z}_i$$



$$\underline{Y}_{eq,parallèle} = \sum \underline{Y}_i$$

$$\underline{Z}_{eq,parallèle} = \frac{1}{\sum \frac{1}{\underline{Z}_i}}$$

Attention: sommes de nombres complexes !

Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 11

L'impédance globale d'éléments en série (traversés par le même courant) est la somme des impédances de chaque élément.

L'admittance globale d'éléments en parallèle (soumis à une même tension) est la somme des admittances de chaque élément.

L'ordre des éléments n'a pas d'influence sur l'impédance globale.

Les éléments peuvent être de types différents (R, L ou C).

Rappel: $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$

DIPÔLES LINÉAIRES EN RÉGIME SINUS

Une **impédance complexe** $\underline{Z}$ peut être décomposée en une **partie réelle** R , appelée **résistance** (>0), et une **partie imaginaire** X , appelée **réactance**.

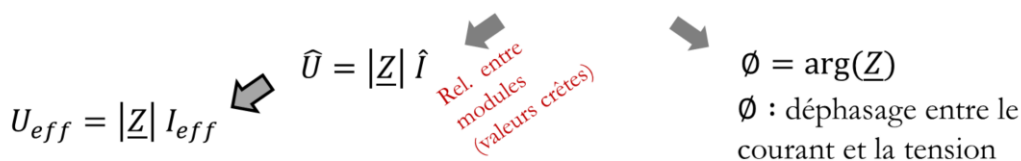
$$\underline{Z} = R + jX$$

Une impédance complexe $\underline{Z}$ peut être représentée par son **module** et par son argument, ou **phase**.

$$|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2} \quad \phi = \arg(\underline{Z}) = \arctg\left(\frac{X}{R}\right)$$

Tension et courant sont liés par :

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$$



Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 12

Une combinaison série/parallèle d'éléments passifs aura une impédance complexe avec une **partie réelle toujours positive**, et une **partie imaginaire positive ou négative** selon les cas.

Rappel de quelques règles de l'algèbre des nombres complexes:

$$\text{Re}(\underline{A} + \underline{B}) = \text{Re}(\underline{A}) + \text{Re}(\underline{B})$$

$$\text{Im}(\underline{A} + \underline{B}) = \text{Im}(\underline{A}) + \text{Im}(\underline{B})$$

$$|\underline{A} \cdot \underline{B}| = |\underline{A}| \cdot |\underline{B}|$$

$$\arg(\underline{A} \cdot \underline{B}) = \arg(\underline{A}) + \arg(\underline{B})$$

$$|1/\underline{A}| = 1/|\underline{A}|$$

$$\arg(1/\underline{A}) = -\arg(\underline{A})$$

DIPÔLES LINÉAIRES EN RÉGIME SINUS

En particulier, on peut écrire.

$$|\underline{U}| = |\underline{Z}| |\underline{I}|$$

$$\arg(\underline{U}) = \arg(\underline{Z}) + \arg(\underline{I})$$

On peut également introduire les **admittances** $\underline{Y}$

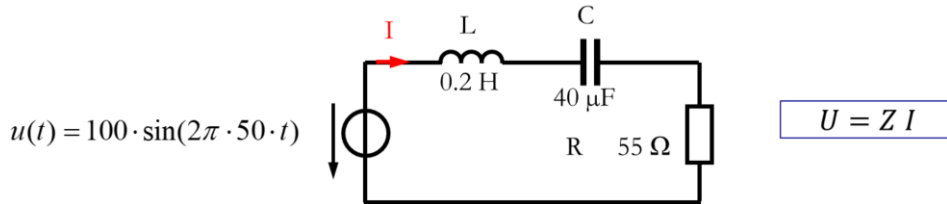
$$|\underline{I}| = |\underline{Y}| |\underline{U}|$$

$$\arg(\underline{I}) = \arg(\underline{Y}) + \arg(\underline{U})$$

En remarquant que: $\arg(\underline{Y}) = -\arg(\underline{Z})$

Exemple de résolution avec Impédances complexes

Exemple. Tension sinusoïdale de 100V d'amplitude à 50 Hz



$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = 55 + j(63 - 80) = 55 - j17 \text{ } (\Omega)$$

$$|Z| = \sqrt{55^2 + 17^2} = 58 \text{ } \Omega \quad \phi = \arctg\left(\frac{-17}{55}\right) = -0.3 \text{ rad} \quad \text{La tension est déphasée de } -17^\circ \text{ degrés vis-à-vis du courant}$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{100}{58} \cdot \sin(2\pi \cdot 50 \cdot t + 0.3)$$

Le courant $i(t)$ aura donc une valeur maximale de 1.72 A et sera déphasé de $+17^\circ$ par rapport à la tension $u(t)$.

Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 14

Dans cet exemple, on remarque que l'association des 3 éléments induit un déphasage entre le courant et la tension, de même qu'une partie 'résistive' à travers le module. Si on change la fréquence, ces valeurs vont également changer.

Finalement, une fois les calculs réalisés dans le plan complexe, on peut revenir à une expression réelle avec les fonctions sinus où apparaîtra l'amplitude et la phase du signal.

DIPÔLES LINÉAIRES EN RÉGIME SINUS: PUISSANCE

Puissance Moyenne, Tension Efficace, Courant Efficace.

La puissance moyenne dissipé sur une période est donnée par:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt$$

La puissance moyenne dépendra de la nature de l'excitation et du composant

**Puissance moyenne pour une
Résistance en régime sinusoïdal**

$$P = \frac{1}{TR} \int_0^T \hat{U}^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{R} \frac{\hat{U}^2}{2} = R \frac{\hat{I}^2}{2}$$

La **tension efficace** et le **courant efficace**, valable en régime sinusoïdal, est donc:

$$U_{eff} = \hat{U} / \sqrt{2}$$

$$I_{eff} = \hat{I} / \sqrt{2}$$



$$P = \frac{U_{eff}^2}{R} = R I_{eff}^2$$

Rappel: La tension efficace et le courant efficace sont des définitions liées au calcul de la puissance moyenne dissipée sur une période.

Ces expressions ne sont valables que dans le cas particulier du régime sinusoïdal.

Si on avait un signal périodique d'une autre forme, les expressions seraient différentes.

DIPÔLES LINÉAIRES EN RÉGIME SINUSOÏDAL - PUISSANCE

La puissance moyenne sur une période:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt$$

On suppose qu'on a: $i(t) = \hat{I} \cos(\omega t + \varphi_1)$ $u(t) = \hat{U} \cos(\omega t + \varphi_2)$

En complexe, on obtient: $P = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{(\underline{I}e^{j\omega t} + \underline{I}^*e^{-j\omega t})(\underline{U}e^{j\omega t} + \underline{U}^*e^{-j\omega t})}{4} dt$

$$P = \frac{1}{4T} \int_0^T (\underline{IU}e^{2j\omega t} + \underline{I}^*\underline{U}^*e^{-2j\omega t} + \underline{I}^*\underline{U} + \underline{IU}^*) dt$$

$$P = \frac{1}{4T} \int_0^T (\underline{I}^*\underline{U} + \underline{IU}^*) dt = \frac{1}{4} (\underline{I}^*\underline{U} + \underline{IU}^*) = \frac{(\underline{I}^*\underline{U}) + (\underline{I}^*\underline{U})^*}{4}$$

DIPÔLES LINÉAIRES EN RÉGIME SINUSOÏDAL - PUISSANCE

$$P = \frac{1}{4T} \int_0^T (\underline{I^*U} + \underline{IU^*}) dt = \frac{1}{4} (\underline{I^*U} + \underline{IU^*}) = \frac{(\underline{I^*U}) + (\underline{I^*U})^*}{4} = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{I^*U})$$

Rappel:

$$\left. \begin{array}{l} (\underline{U} = \widehat{U} e^{j\varphi_2}) \\ (\underline{I} = \widehat{I} e^{j\varphi_1}) \end{array} \right\} \quad \underline{I^*U} = \widehat{I} e^{-j\varphi_1} \widehat{U} e^{j\varphi_2} = \widehat{I} \widehat{U} e^{j(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{I^*U}) = \frac{1}{2} (\widehat{I} \widehat{U} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)) = \frac{\widehat{U}}{\sqrt{2}} \frac{\widehat{I}}{\sqrt{2}} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$



$$P = U_{eff} I_{eff} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

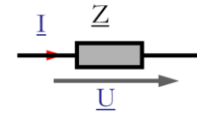
La puissance moyenne dépend également du déphasage entre le courant et la tension

Notez qu'on peut démontrer cette relation de puissance moyenne en effectuant le calcul avec les fonctions réelles sinus et cosinus.

DIPÔLES LINÉAIRES EN RÉGIME SINUSOÏDAL. PUISSANCE

En introduisant la notion d'impédance Z , la puissance moyenne s'écrit

$$P = U_{eff} I_{eff} \cos(\text{Arg}(Z)) = U_{eff} I_{eff} \cos(\text{Arg}(Y))$$



La *puissance apparente* consommée (max de $P_{\text{réel}}$): $P_{\text{max}} = U_{eff} I_{eff}$ [VA]

Puissance moyenne dissipée par une capacité

$$P = U_{eff} I_{eff} \cos(-\pi/2) = 0$$

Puissance moyenne dissipée par une inductance

$$P = U_{eff} I_{eff} \cos(\pi/2) = 0$$

Puissance moyenne dissipée par une résistance

$$P = U_{eff} I_{eff} \cos(0) = U_{eff} I_{eff}$$

La puissance réelle est celle qui est dissipée sous forme de chaleur (ou transformée en puissance mécanique dans un moteur).

La puissance apparente est celle qui est indiquée sur les appareils et qui permet de dimensionner les câbles et les fusibles du réseau d'alimentation.

Pour la capacité et l'inductance, aucune énergie n'est dissipée sur une période. Ces éléments emmagasinent l'énergie (énergie électrique pour la capacité, énergie magnétique pour l'inductance), puis ils la restituent sans pertes (à condition que leur résistance 'parasite soit nulle... en réalité, il existera toujours une résistance très faible).

DIPÔLES LINÉAIRES EN RÉGIME SINUSOÏDAL. PUISSANCE

Autre expression de la puissance moyenne

$$P = U_{eff} I_{eff} \cos(\text{Arg}(\underline{Z}))$$

Mais la tension efficace vérifie aussi la relation

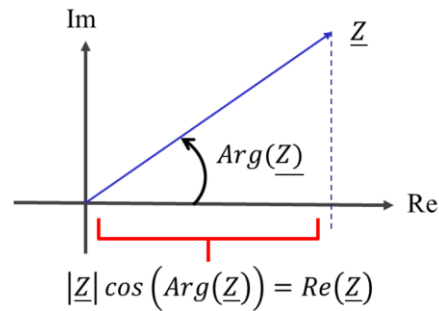
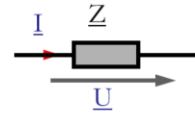
$$U_{eff} = |\underline{Z}| I_{eff}$$

En combinant les deux expressions, on obtient:

$$P = I_{eff}^2 |\underline{Z}| \cos(\text{Arg}(\underline{Z})) = I_{eff}^2 \text{Re}(\underline{Z})$$

Attention !

$$P \neq \frac{U_{eff}^2}{\text{Re}(\underline{Z})}$$



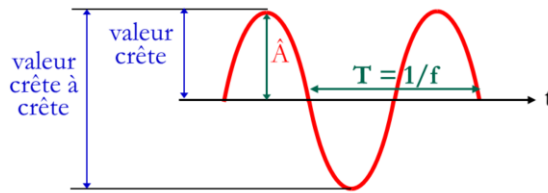
On remarque que seule la partie réelle de l'admittance dissipe de l'énergie sur une période.

C'est en fait la partie résistive du circuit.

Les parties imaginaires de l'admittance ont un bilan énergétique moyen qui est nul sur une période.

Attention à ne pas utiliser la relation $\frac{U_{eff}^2}{\text{Re}(\underline{Z})}$ pour calculer la puissance moyenne ...

AMPLITUDE D'UN SIGNAL SINUS, CONVENTION



Pour un signal $a(t) = \hat{A} \sin \omega t$, on spécifie son amplitude en indiquant l'une des trois valeurs suivantes :

Valeur de crête (Peak)	$A_{\text{crête}} = \hat{A}$
Valeur crête à crête (Peak-to-Peak)	$A_{\text{p-p}} = 2\hat{A}$
Valeur efficace (RMS)	$A_{\text{eff}} = \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}}$

On utilise souvent la fréquence plutôt que la pulsation ω (ω fréquence angulaire en rad/sec) :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad [\text{Hz}]$$

Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 20

La valeur de crête est celle utilisée dans l'expression mathématique du signal: $\hat{A} \sin(\omega t)$, souvent écrite $A \sin(\omega t)$.

La valeur crête à crête est parfois utilisée lors de mesures à l'oscilloscope, parce que la ligne du 'zéro' est parfois imprécise.

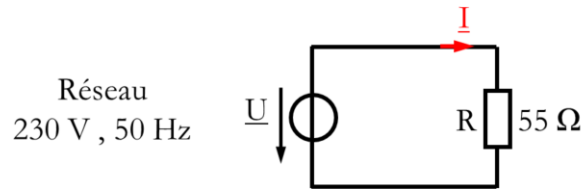
La valeur efficace est la plus utilisée, car c'est celle indiquée par les voltmètres (attention: n'a de sens que si le signal est sinusoïdal).

Dans le domaine de l'énergie électrique, on utilise exclusivement cette représentation et on parle simplement de "Volts", sous-entendu "efficaces".

(on rencontre aussi l'acronyme RMS, qui signifie Root Mean Square (moyenne de la racine du carré). Il s'agit de la définition de la valeur efficace).

DIPÔLES LINÉAIRES EN RÉGIME SINUSOÏDAL. PUISSANCE

Ex1 - Courant et puissance fournis par le réseau (valeur efficace 230 V) ?



$$u(t) = \sqrt{2} \cdot 230 \cdot \sin(2\pi \cdot 50 \cdot t)$$

$$\underline{Z} = R = 55 \, \Omega \quad |\underline{Z}| = R = 55 \, \Omega \quad \phi = 0$$

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{|\underline{Z}|} = \frac{U_{\text{eff}}}{R} = \frac{230}{55} = 4.18 \, \text{A}$$

$$P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \phi = 960 \, \text{W}$$

Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 21

La tension du réseau électrique domestique est toujours indiquée en valeur efficace.

Dans le cas d'une charge purement résistive, on retrouve les expressions simples:

$$I = U/R, \quad P = U \cdot I \quad \text{puisque } \cos \phi = 1$$

La puissance dissipée est $P = 960 \, \text{W}$

DIPÔLES LINÉAIRES EN RÉGIME SINUSOÏDAL. PUISSANCE

Ex. 2 - Courant et puissance fournis par le réseau: $u(t) = \sqrt{2} \cdot 230 \cdot \sin(2\pi \cdot 50 \cdot t)$

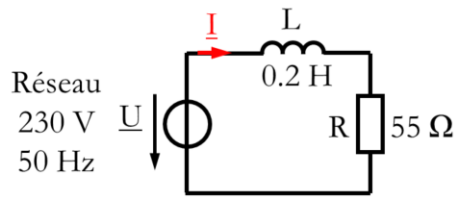
$$\underline{Z} = R + jL\omega = 55 + j 63$$

$$|\underline{Z}| = \sqrt{55^2 + 63^2} = 84 \, \Omega$$

$$\phi = \arctg\left(\frac{63}{55}\right) = 49^\circ$$

$$U_{eff} = 230 \, V$$

$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{|\underline{Z}|} = \frac{230}{84} = 2.74 \, A$$



$$P = I_{eff} U_{eff} \cos(\phi) = 413 \, W$$

Ce qui correspond à la partie résistive $P = I_{eff}^2 \operatorname{Re}(Z) = 2.74^2 \cdot 55 = 413 \, W$

Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 22

Dans le cas d'une charge mixte **résistive et réactive**, les valeurs en Ohms ne s'additionnent pas directement car l'impédance totale est une somme complexe.

Le déphasage entre courant et tension dépend du rapport réactance/résistance.

La puissance réelle est absorbée uniquement par la résistance, on peut vérifier que:

$$P = R \cdot I_{eff}^2 = 413 \, W.$$

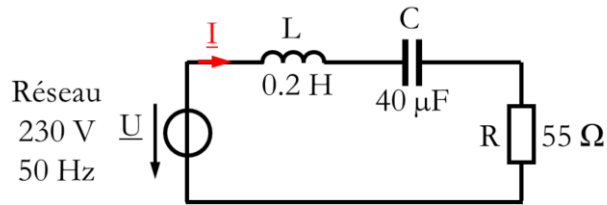
(le bilan énergétique d'une inductance est nul sur une période)

Tandis que la puissance apparente qui est donnée par $P_a = U_{eff} I_{eff}$ serait de 630 W, donc plus élevée.

Attention à ne pas utiliser U_{eff}^2 / R pour la puissance réelle: si on calcule U_{eff}^2 / R , on trouverait 961 W.... Ce qui est faux...

DIPÔLES LINÉAIRES EN RÉGIME SINUSOÏDAL. PUISSANCE

Ex. 3 Courant et puissance fournis par le réseau:



$$u(t) = \sqrt{2} \cdot 230 \cdot \sin(2\pi \cdot 50 \cdot t)$$

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 55 + j(63 - 80) = 55 - j17 \, \Omega$$

$$|Z| = \sqrt{55^2 + 17^2} = 58 \, \Omega \quad \phi = \arctg\left(\frac{-17}{55}\right) = -17^\circ$$

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{|Z|} = \frac{230}{58} = 3.97 \, \text{A} \quad P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \phi = 870 \, \text{W}$$

Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 23

La puissance réelle est absorbée par la seule résistance, on peut vérifier que:

$$P = R \cdot I_{\text{eff}}^2 = 870 \, \text{W} .$$

En effet, sur une période, l'inductance et la capacité ne dissipent pas d'énergie, peu importe où ils se trouvent dans le circuit.

La puissance apparente est $P_a = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = 910 \, \text{W}$.

DIPÔLES LINÉAIRES EN RÉGIME SINUS THÉORÈME DE SUPERPOSITION

THÉORÈME DE SUPERPOSITION

Dans un circuit linéaire l'effet de plusieurs **sources sinusoïdales indépendantes** est égal à la **somme complexe** des effets de chaque source lorsque les autres sont 'annulées'.

EQUIVALENT DE THÉVENIN-NORTON

Tout dipôle linéaire en régime sinusoïdal peut se réduire à:

Une source de tension $\underline{U}_{eqT}$ **en série** avec une impédance de source $\underline{Z}_s$ (Thévenin),

ou

Une source de courant $\underline{I}_{eqN}$ **en parallèle** avec cette même impédance de source $\underline{Z}_s$ (Norton).

Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 24

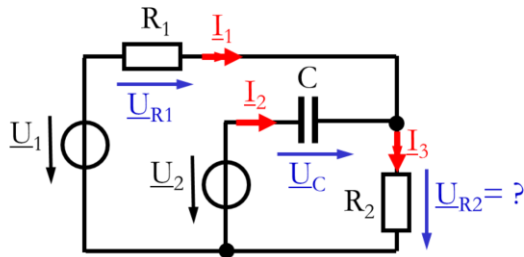
Attention, il s'agit de relations complexes !

Remarque:

Étant donné que les sources équivalentes de Thévenin et de Norton seront obtenues à partir de courants et de tensions qui sont calculés en régime sinusoïdal, on comprend bien que ces source équivalentes pourront aussi avoir des propriétés qui dépendent de la fréquence (pulsation ω).

De même, elles peuvent contenir des termes de phase.

EXEMPLE D'ANALYSE FRÉQUENTIELLE



$$\text{maille ext.: } \underline{U}_{R1} + \underline{U}_{R2} - \underline{U}_1 = 0$$

$$\text{maille int.: } \underline{U}_C + \underline{U}_{R2} - \underline{U}_2 = 0$$

$$\text{noeud: } I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$\underline{U}_{R1} = R_1 \cdot I_1 \quad \underline{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot I_2$$

$$\underline{U}_{R2} = R_2 \cdot I_3$$

$$\underline{U}_{R2} = R_2 I_3 = R_2 (I_2 + I_1) = R_2 \left(j\omega C \underline{U}_C + \frac{\underline{U}_{R1}}{R_1} \right) = R_2 \left(j\omega C (\underline{U}_2 - \underline{U}_{R2}) + \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_{R2}}{R_1} \right)$$

$$\underline{U}_{R2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega C R_1 R_2} \underline{U}_1 + \frac{j\omega C R_1 R_2}{R_1 + R_2 + j\omega C R_1 R_2} \underline{U}_2$$

$$\underline{U}_{R2} = \underbrace{\frac{R_2 / (R_1 + R_2)}{1 + j\omega C R_{12}}}_{H_1(j\omega)} \underline{U}_1 + \underbrace{\frac{j\omega C R_{12}}{1 + j\omega C R_{12}}}_{H_2(j\omega)} \underline{U}_2 \quad \text{où: } R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1 // R_2$$

Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 25

On procède comme d'habitude, en définissant les différentes mailles (attention, certaines peuvent être redondantes) et nœuds.

Ensuite on introduit les relations spécifiques des composants.

On s'assure qu'il y a autant d'équations que d'inconnues (si on a plus d'équations que d'inconnues, c'est vraisemblablement qu'on a exprimé plusieurs fois une condition identique. Dans ce cas, on doit en choisir une).

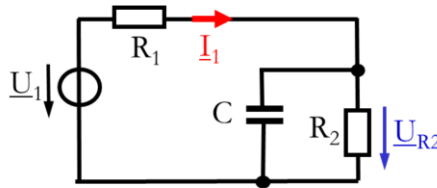
On remarque que la tension $\underline{U}_{R2}$ fait apparaître deux contributions : l'une provenant de la source $\underline{U}_1$, et l'autre de la source $\underline{U}_2$.

... ce qui fait penser à une superposition...

EXEMPLE D'ANALYSE FRÉQUENTIELLE

On peut procéder par superposition en considérant 1 source à la fois

On 'annule' U_2 et on calcule la contribution de U_1



$$\begin{aligned} \underline{U}_{R2} &= I_1 (\underline{Z}_C // R_2) = (\underline{Z}_C // R_2) \frac{\underline{U}_1}{R_1 + (\underline{Z}_C // R_2)} \rightarrow \underline{U}_{R2} = \frac{1}{j\omega C + 1/R_2} \frac{\underline{U}_1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C + 1/R_2}} \\ \underline{U}_{R2} &= \frac{1}{1 + R_1(j\omega C + 1/R_2)} \underline{U}_1 \quad \leftarrow \quad \underline{U}_{R2} = \frac{1}{j\omega C + 1/R_2} \frac{(j\omega C + 1/R_2)}{1 + R_1(j\omega C + 1/R_2)} \underline{U}_1 \\ \downarrow \\ \underline{U}_{R2} &= \frac{R_2}{R_2 + R_1(j\omega R_2 C + 1)} \underline{U}_1 \quad \rightarrow \quad \underline{U}_{R2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C} \underline{U}_1 \end{aligned}$$

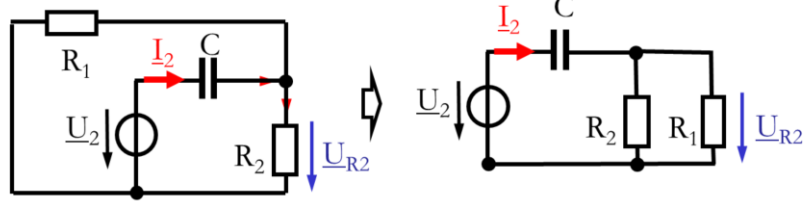
$$\underline{U}_{R2} = \frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}{1 + j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C} \underline{U}_1$$

Contribution de U_1

On traite ici la contribution de la source de tension U_1 uniquement, en annulant la source de courant.

EXEMPLE D'ANALYSE FRÉQUENTIELLE

On 'annule'
 U_1 et on
calcule la
contribution
de U_2



Après calculs (voir exercice série 3)
la contribution de U_2 est :

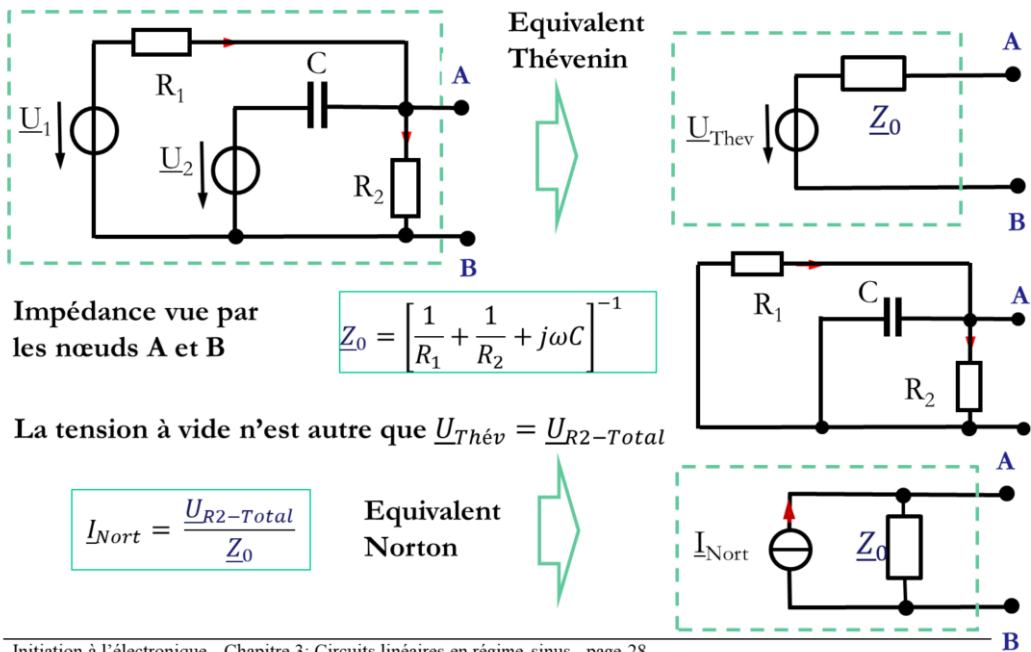
$$U_{R2} = \frac{j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C}{1 + j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C} U_2$$

La somme de chaque contribution redonne bien la tension calculée en prenant en compte les sources de manière simultanée.

$$U_{R2-Total} = \frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}{1 + j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C} U_1 + \frac{j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C}{1 + j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C} U_2$$

En appliquant le principe de superposition on obtient le même résultat.

EXEMPLE D'ANALYSE FRÉQUENTIELLE



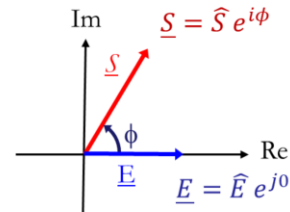
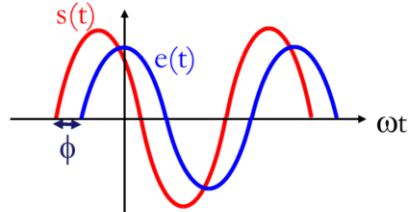
On obtient une représentation Thévenin ou Norton en appliquant le théorème de Thévenin – Norton avec des sources se courant ou de tensions complexes, sous la forme de phaseurs, et une impédance $\underline{Z}_0$ complexe également.

SYSTÈME LINÉAIRE EN RÉGIME SINUS ANALYSE FRÉQUENTIELLE- FONCTION DE TRANSFERT

Dans un **système linéaire**, la réponse à une excitation sinusoïdale est :

- Sinusoïdale et de même fréquence que l'excitation, avec un déphasage.
- D'amplitude proportionnelle à l'amplitude de l'excitation, ce qui s'écrit :

$$e(t) = \hat{E} \cos(\omega t) \longrightarrow \boxed{\text{système linéaire}} \longrightarrow s(t) = H \hat{E} \cos(\omega t + \phi) = \hat{S} \cos(\omega t + \phi)$$



Fonction de transfert

D'un point de vue phaseurs, on aura $\underline{S} = \underline{H} \underline{E}$

Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 30

Dans l'exemple précédent, nous avons vu que le signal de sortie (en tant que phaseur) était lié au signal d'entrée (en tant que phaseur) par une fonction complexe.

Cette analyse peut se généraliser à une 'boîte noire' qui représente un système linéaire:

L'analyse des systèmes linéaires (circuits linéaires) montre que la réponse en régime permanent d'un système linéaire est donnée par la solution particulière de l'équation différentielle qui modélise le système. Cette réponse est de même forme que l'excitation, dans ce cas particulier: sinusoïdale.

La fonction qui relie le signal de sortie au signal d'entrée est la Fonction de Transfert $\underline{H}$. Il s'agit d'une fonction à variables complexes.

Son module est donné par le rapport des amplitudes:

$$H=|\underline{H}| = \frac{\text{amplitude de la réponse}}{\text{amplitude de l'excitation}} = \frac{\hat{S}}{\hat{E}}$$

L'argument se $\underline{H}$ représente le déphasage entre le signal de sortie et celui d'entrée:
 $\phi = \text{Phase réponse} - \text{Phase excitation}$

On va démontrer la validité de la notation complexe en terme de phaseurs : $\underline{S} = \underline{H} \cdot \underline{E}$

Pour simplifier, on suppose $\underline{E} = \hat{E}$, c'est-à-dire qu'on n'introduit pas de déphasage pour l'excitation ($\underline{E} = \hat{E} e^{j0}$).

Le signal de sortie s'écrit de la manière suivante:

$$\begin{aligned} s(t) &= H \hat{E} \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}(H \hat{E} e^{i(\omega t + \phi)}) = \operatorname{Re}(H e^{i\phi} \hat{E} e^{i\omega t}) = \operatorname{Re}(\underline{H} \hat{E} e^{i\omega t}) \\ &= \operatorname{Re}(\underline{H} \underline{E} e^{i\omega t}) \end{aligned}$$

Et on a aussi :

$$s(t) = \hat{S} \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}(\hat{S} e^{i(\omega t + \phi)}) = \operatorname{Re}(\hat{S} e^{i\phi} e^{i\omega t}) = \operatorname{Re}(\underline{S} e^{i\omega t})$$

Même démarche si $s(t) = H \hat{E} \sin(\omega t + \phi)$.

Donc on en déduit : $\underline{S} = \underline{H} \underline{E}$

SYSTÈME LINÉAIRE EN RÉGIME SINUS ANALYSE FRÉQUENTIELLE- FONCTION DE TRANSFERT

En toute généralité, le **rapport des amplitudes et le déphasage** deviennent des fonctions de la pulsation:

$$s(t) = H(\omega) \hat{E} \sin(\omega t + \phi(\omega))$$

En notation complexe on a: $\underline{S}(j\omega) = \underline{H}(j\omega) \underline{E}(j\omega)$

Fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}(j\omega)}{\underline{E}(j\omega)}$$

Critères de stabilité:

- les **pôles** (les racines du dénominateur, nbs complexes) **ont une partie réelle négative.**
- le **degré du dénominateur est supérieur ou égal au numérateur.**

Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 31

La fonction de transfert est aussi appelée réponse fréquentielle, ou encore réponse harmonique.

Pour un système linéaire **stable**, c'est à dire avec une sortie constante pour un signal d'entrée nul (c'est-à-dire un signal qui ne diverge pas), la fonction de transfert se présente sous la forme d'un rapport de deux polynômes en $j\omega$

Le polynôme dénominateur doit avoir des **zéros en ($j\omega$) à partie réelle négative** et son **degré doit être supérieur ou égal à celui du numérateur.**

On appelle 'pôles' les valeurs qui annulent le dénominateur de la fonction de transfert.

SYSTÈME LINÉAIRE EN RÉGIME SINUS ANALYSE FRÉQUENTIELLE

Méthode:

- Définir arbitrairement toutes les inconnues $\underline{I}$ et $\underline{U}$.
- Etablir les équations de toutes les mailles indépendantes.
- Etablir les équations de tous les nœuds indépendants.
- Poser les relations $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$ de tous les éléments passifs.
- Résoudre le système de N équations à N inconnues.

On obtient une relation algébrique complexe entre l'inconnue recherchée $\underline{S}$ (sortie) et les **sources indépendantes** $\underline{E}_k$ (entrées)

$$S(j\omega) = \sum_k H_k(j\omega) E_k(j\omega)$$

où $\underline{H}_k(j\omega)$ est la fonction de transfert de l'entrée k vers la sortie.

Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 32

$\underline{S}$ et $\underline{E}$ peuvent être indifféremment des tensions ou des courants.

Le **théorème de superposition** implique que l'on peut calculer chaque fonction de transfert séparément en ne conservant que la source indépendante E_k et en annulant l'effet de toutes les autres sources indépendantes:

$$\underline{H}_k(j\omega) = \frac{\underline{S}(j\omega)}{\underline{E}_k(j\omega)}$$

Et les autres 'entrées' sont annulées, $\underline{E}_p(j\omega) = 0$ si $p \neq k$

Rappels:

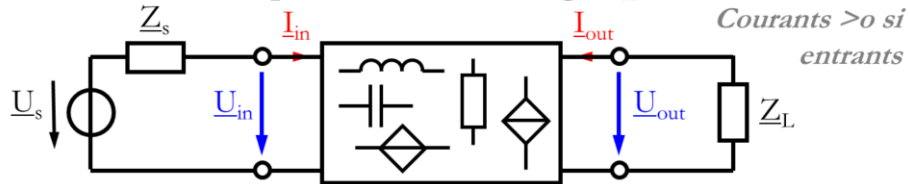
Annuler une source de tension $\Leftrightarrow$ la remplacer par un court-circuit.

Annuler une source de courant $\Leftrightarrow$ la remplacer par un circuit ouvert.

Attention: si une source est commandée par une autre source, les deux sources sont conservées (avec leur dépendance) lorsqu'on calcule leurs effets par superposition.

QUADRIPOLE ÉLECTRIQUE LINÉAIRE ET FONCTION DE TRANSFERT

Un **quadripôle linéaire** est un circuit composé uniquement d'éléments linéaires avec **deux bornes d'entrée**, auxquelles est branchée **une source indépendante** avec son **impédance de source** Z_s , et **deux bornes de sortie** connectées à une **impédance dite de charge** Z_L .



Dans le cas général on peut définir quatre fonctions de transfert:

$$\text{Gain en tension : } \underline{H}(j\omega) = \frac{U_{\text{out}}}{U_{\text{in}}}$$

$$\text{Transimpédance : } \underline{H}(j\omega) = \frac{U_{\text{out}}}{I_{\text{in}}}$$

$$\text{Gain en courant : } \underline{H}(j\omega) = \frac{I_{\text{out}}}{I_{\text{in}}}$$

$$\text{Transadmittance : } \underline{H}(j\omega) = \frac{I_{\text{out}}}{U_{\text{in}}}$$

Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 33

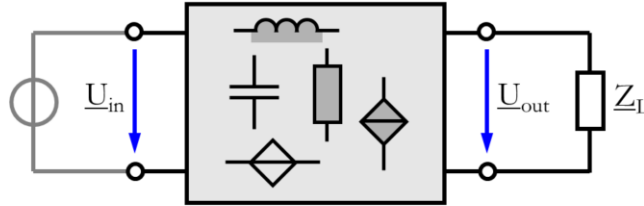
Les quadripôles linéaires courants sont des assemblages de dipôles linéaires passifs et de sources commandées linéaires.

Dans certains cas un quadripôle peut aussi être composé de transformateurs.
(c'est un quadripôle élémentaire particulier qui ne peut pas être décrit comme un assemblage de dipôles).

Par convention, les **courants aux deux accès du quadripôle sont définis positifs dans le sens rentrant**.

QUADRIPOLE ÉLECTRIQUE LINÉAIRE ET FONCTION DE TRANSFERT

En électronique, on s'intéresse souvent au **gain en tension** d'un quadripôle.



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{\text{polynôme numérateur en } j\omega}{\text{polynôme dénominateur en } j\omega}$$

Cette fonction de transfert change selon la nature de la charge Z_L donnée

Stable si : polynôme dénominateur de variable $x = j\omega$ a des zéros à partie réelle négative.
polynôme dénominateur est de degré supérieur ou égal à celui du numérateur.

Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 34

Pour un système linéaire stable, c'est à dire avec une sortie constante pour une entrée nulle, le polynôme dénominateur de variable $x = j\omega$ doit avoir des zéros à partie réelle négative et son degré doit être supérieur ou égal à celui du numérateur.

Exemples de polynômes en $j\omega$:

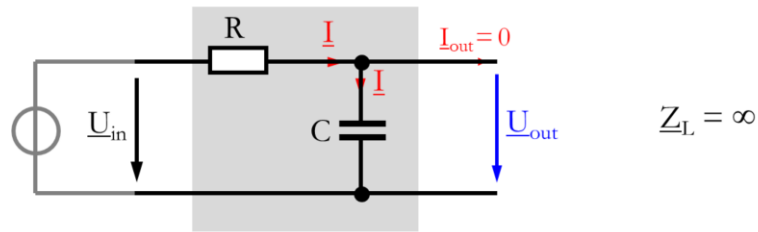
$$(j\omega)^2 + 5j\omega + 6 = 0 \Rightarrow j\omega = -2 \text{ ou } j\omega = -3 \quad \text{deux zéros réels négatifs}$$

$$(j\omega)^2 + 2j\omega + 2 = 0 \Rightarrow j\omega = -1 - j \text{ ou } j\omega = -1 + j$$

deux zéros complexes conjugués à partie réelle négative

$$(j\omega)^2 - 3j\omega + 2 = 0 \Rightarrow j\omega = +2 \text{ ou } j\omega = +1 \quad \text{deux zéros réels positifs}$$

**EXEMPLE 1: FONCTION DE TRANSFERT D'UN CIRCUIT
RC PASSE-BAS**



$$\underline{U}_{out} = \underline{Z}_C \underline{I} = \underline{Z}_C \frac{\underline{U}_{in}}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \underline{U}_{in} \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{out}}{\underline{U}_{in}} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

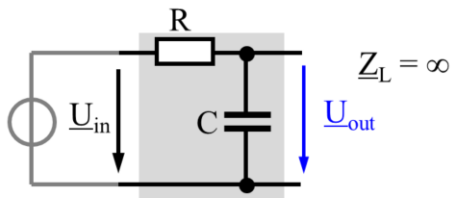
Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 35

Lorsqu'on s'intéresse à des signaux sinusoïdaux, on utilise les phaseurs de la même manière que l'on utilisait les résistances en régime statique.

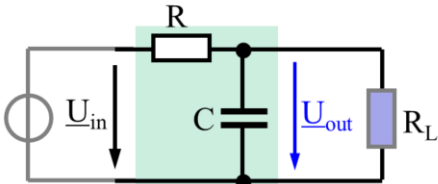
La différence est que les tensions et les courants auront des amplitudes qui vont pouvoir dépendre de la fréquence, et ils seront déphasés les uns par rapports aux autres.

La fonction de transfert exprimée en tant que phaseur, c'est-à-dire en notation complexe, contiendra ces informations.

EXEMPLE 1: IMPORTANCE DE SPÉCIFIER LA CHARGE



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_C} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z}_C // R_L}{R + (\underline{Z}_C // R_L)} = \frac{\frac{1}{j\omega C + \frac{1}{R_L}}}{R + \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{R_L}}}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{R_L}{1 + j\omega CR_L}}{R + \frac{R_L}{1 + j\omega CR_L}} = \frac{R_L}{R + R_L} \cdot \frac{1}{1 + j\omega C \frac{RR_L}{R + R_L}}$$

Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 36

Le deuxième circuit peut être vu comme le cas précédent en remplaçant $\underline{Z}_C$ par l'impédance complexe ' $\underline{Z}_C$ en parallèle avec R_L '.

Remarque: si la pulsation est nulle, alors la capacité n'intervient plus et le circuit se ramène à un diviseur résistif:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R_L}{R + R_L}$$

Et la tension de sortie est:

$$U_{out} = \underline{H}(j\omega)U_{in} = \frac{R_L}{R + R_L} U_{in}$$

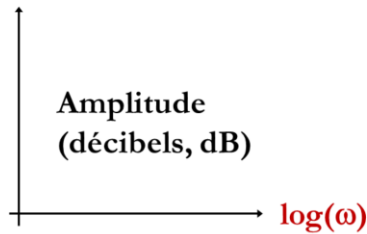
Dans ce cas, toutes les quantités sont réelles, il n'y a plus de nombre complexe.

FONCTION DE TRANSFERT ET DIAGRAMME DE BODE

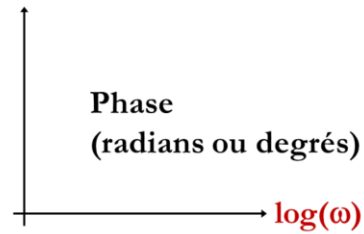
Une fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ est représentée graphiquement dans deux diagrammes que l'on appelle les **diagrammes de Bode**:

On y représente $\underline{H}(j\omega)$ par son module et son argument, ou phase.

$$|\underline{H}|_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}|$$



$$\varnothing = \arg(\underline{H})$$



Les **logarithmes sont en base 10**.

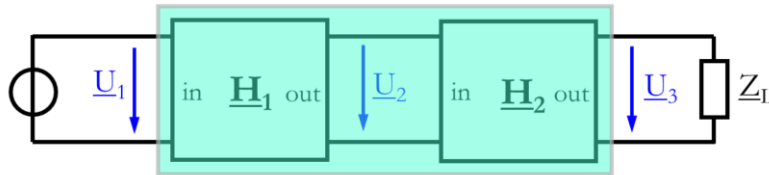
En abscisse, $\log(\omega)$ est généralement remplacé par ω en échelle logarithmique.

On utilise une représentation logarithmique lorsqu'une variable varie sur plusieurs décades, ce qui est le cas en général de la fréquence et donc de la pulsation ($\omega = 2\pi f$), ainsi que du module de $\underline{H}(j\omega)$.

Par contre la phase de $\underline{H}(j\omega)$ ne varie généralement que de quelques dizaines de radians et sa représentation est mieux adaptée par une échelle linéaire.

FONCTION DE TRANSFERT ET DIAGRAMME DE BODE

Avec ce mode de représentation en $|\underline{H}|_{\text{dB}}$ et $\varnothing$, le diagramme de Bode global de la mise en cascade de plusieurs quadripôles est égal à la **somme des diagrammes de chaque fonction de transfert.**



$$\underline{U}_3 = \underline{H}_2 \cdot \underline{U}_2 = \underline{H}_2 \cdot \underline{H}_1 \cdot \underline{U}_1 = \underline{H}_{\text{total}} \cdot \underline{U}_1 \quad \Rightarrow \quad \underline{H}_{\text{total}} = \underline{H}_2 \cdot \underline{H}_1$$

$$|\underline{H}_{\text{total}}|_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}_{\text{total}}| = 20 \log |\underline{H}_2 \cdot \underline{H}_1| = 20 \log |\underline{H}_2| + 20 \log |\underline{H}_1|$$

$$|\underline{H}_{\text{total}}|_{\text{dB}} = |\underline{H}_2|_{\text{dB}} + |\underline{H}_1|_{\text{dB}}$$

$$\varnothing_{\text{total}} = \arg(\underline{H}_{\text{total}}) = \arg(\underline{H}_2 \cdot \underline{H}_1) = \arg(\underline{H}_2) + \arg(\underline{H}_1) = \varnothing_2 + \varnothing_1$$

La mise en cascade de plusieurs quadripôles (la sortie d'un étage branchée sur l'entrée du suivant) correspond au **produit complexe des fonctions de transfert.**

Les modules vont se multiplier, donc 'leurs logarithmes' s'additionner.

Les arguments vont se sommer.

Donc finalement, lorsque plusieurs quadripôles sont en cascade, on additionne simplement les dB de chacun, et on fait de même avec phases en radians ou en degrés.

FONCTION DE TRANSFERT ET DIAGRAMME DE BODE

Cas simple: fonction de transfert avec des zéros et des pôles réels

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i (j\omega)^i}{\sum_{i=0}^n b_i (j\omega)^i} = K \cdot \frac{\prod_{\omega_{zi}} \frac{j\omega}{\omega_{zi}} \cdot \prod (1 + \frac{j\omega}{\omega_{zi}})}{\prod_{\omega_{pi}} \frac{j\omega}{\omega_{pi}} \cdot \prod (1 + \frac{j\omega}{\omega_{pi}})}$$

$$|\underline{H}|_{dB} = 20 \log|K| + \sum 20 \log \left| \frac{j\omega}{\omega_{zi}} \right| + \sum 20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{\omega_{zi}} \right| + \sum 20 \log \left| \frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_{pi}}} \right| + \sum 20 \log \left| \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_{pi}}} \right|$$

$$\phi = \arg(K) + \sum \arg \left(\frac{j\omega}{\omega_{zi}} \right) + \sum \arg \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_{zi}} \right) + \sum \arg \left(\frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_{pi}}} \right) + \sum \arg \left(\frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_{pi}}} \right)$$

Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 39

Pour construire les diagrammes de Bode, il est important de mettre la fonction de transfert sous la forme d'un rapport de deux polynômes en $j\omega$. **Il faut considérer $j\omega$ comme la variable x et éviter de dissocier j de ω , en particulier ne pas remplacer $(j\omega)^2$ par $-\omega^2$.**

Les zéros sont les valeurs particulières de **la variable $x = j\omega$** qui annulent le numérateur de $\underline{H}(j\omega)$.

Les pôles sont les valeurs particulières de **la variable $x = j\omega$** qui annulent le dénominateur de $\underline{H}(j\omega)$.

De nombreux circuits couramment utilisés ont une fonction de transfert à pôles et zéros réels.

Exemple d'un polynôme à zéros réels (la variable est ici $j\omega$): $(j\omega)^3 + 9(j\omega)^2 + 20j\omega$ les zéros en $j\omega$ sont 0; -4 et -5

Le polynôme peut se mettre sous la forme

$$(j\omega)^3 + 9(j\omega)^2 + 20j\omega = j\omega(j\omega + 5)(j\omega + 4)$$

Ce qui après arrangement donne la forme recherchée

$$= 20 j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{5} \right) \left(1 + \frac{j\omega}{4} \right)$$

Autre exemple d'un polynôme à racines réelles:

$$(j\omega)^2 + 7(j\omega) + 10 = (2 + j\omega)(5 + j\omega)$$

les racines en $(j\omega)$ sont réelles: $j\omega_1 = -2$ et $j\omega_2 = -5$.

On peut réécrire ce polynôme :

$$(j\omega)^2 + 7(j\omega) + 10 = 2 \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_1}\right) 5 \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_2}\right) = 10 \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_1}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_2}\right)$$

Notons que dans ces deux exemples, les parties réelles sont négative et par conséquent le système sera stable.

D'autres circuits, en particulier les filtres de degré ≥ 2 , ont une fonction de transfert avec des pôles et des zéros qui sont conjugués complexes.

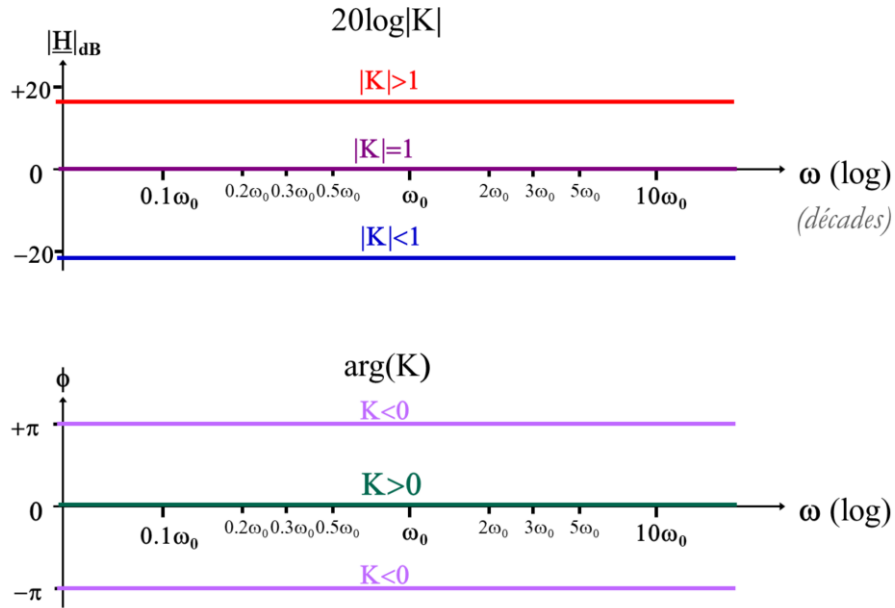
Exemple d'un polynôme à zéros conjugués complexes:

$$(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 5$$

les racines en $(j\omega)$ sont complexes: $-1 + 2j$ et $-1 - 2j$

Bien que les parties réelles soient négatives, et que le système soit donc stable, on ne peut pas l'exprimer comme un produit de termes $K \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_a}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_b}\right)$.

DIAGRAMME DE BODE D'UN TERME $K = \text{CONSTANTE RÉELLE}$.



Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 40

L'axe horizontal est gradué en échelle logarithmique en base 10.

On parle de décades.

Un facteur K réel constant est invariant avec ω .

$\log_{10}|K|$ est positif pour $|K| > 1$, nul pour $|K| = 1$, négatif pour $|K| < 1$.

$$20 \cdot \log(1) = 0 \text{ dB}$$

$$20 \cdot \log(1.4) \approx +3 \text{ dB}$$

$$20 \cdot \log(0.7) \approx -3 \text{ dB}$$

$$20 \cdot \log(2) \approx +6 \text{ dB}$$

$$20 \cdot \log(0.5) \approx -6 \text{ dB}$$

$$20 \cdot \log(3) \approx +10 \text{ dB}$$

$$20 \cdot \log(0.3) \approx -10 \text{ dB}$$

$$20 \cdot \log(10) = +20 \text{ dB}$$

$$20 \cdot \log(0.1) = -20 \text{ dB}$$

$$20 \cdot \log(100) = +40 \text{ dB}$$

$$20 \cdot \log(0.01) = -40 \text{ dB}$$

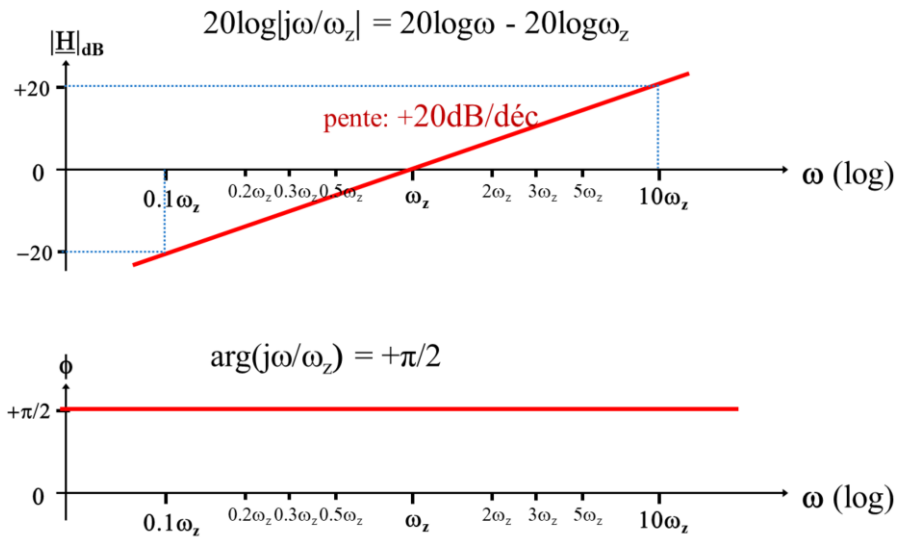
$$20 \cdot \log(1000) = +60 \text{ dB}$$

$$20 \cdot \log(0.001) = -60 \text{ dB}$$

Un nombre réel positif a un argument nul.

Un nombre réel négatif a un argument $\pm\pi$, car l'argument a un modulo de 2π .

DIAGRAMME DE BODE D'UN TERME $j\omega/\omega_z$



Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 41

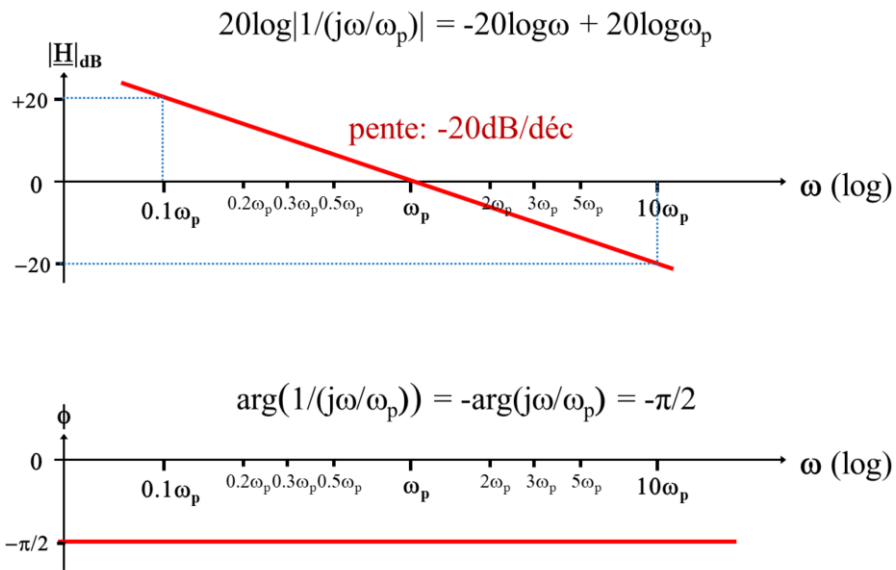
ω_z est une constante positive.

En $\omega = \omega_z$, $|j\omega/\omega_z| = 1$, soit 0 dB.

Si ω est multiplié par 10, alors $|j\omega/\omega_z|$ est multiplié par 10, soit +20 dB, d'où la pente de +20dB/décade.

$j\omega/\omega_z$ est purement imaginaire positif pour tout ω , d'où un argument constant de $+\pi/2$.

DIAGRAMME DE BODE D'UN TERME $1/(j\omega/\omega_p)$



Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 42

ω_p est une constante positive.

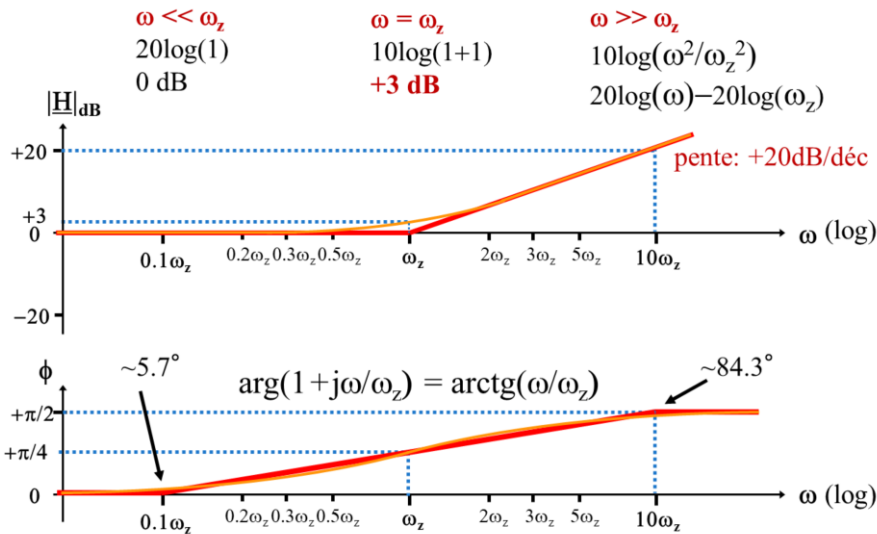
En $\omega = \omega_p$, $|1/(j\omega/\omega_p)| = 1$, soit 0 dB.

Si ω est multiplié par 10, alors $|1/(j\omega/\omega_p)|$ est multiplié par 1/10, soit -20 dB, d'où la pente de -20dB/décade.

$1/(j\omega/\omega_p) = -j\omega_p/\omega$ est purement imaginaire négatif pour tout ω , d'où un argument constant de $-\pi/2$.

DIAGRAMME DE BODE D'UN TERME $1 + j\omega/\omega_z$

$$20 \log |1 + j\omega/\omega_z| = 20 \log \sqrt{1^2 + \omega^2/\omega_z^2} = 10 \log (1^2 + \omega^2/\omega_z^2)$$



Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 43

ω_z est une constante positive.

Pour $\omega < \omega_z$, $|1 + j\omega/\omega_z| \approx 1$, soit une demi droite à 0 dB à gauche de ω_z .

Pour $\omega > \omega_z$, $|1 + j\omega/\omega_z| \approx |j\omega/\omega_z|$, soit une demi droite partant de 0 dB en ω_z et montant de 20dB/décade pour ω croissant.

Ces demi-droites sont appelées asymptotes. La courbe réelle suit assez fidèlement les asymptotes avec un écart maximal de +3 dB en ω_z . La pulsation du point de changement de pente des asymptotes est dite de "**coupure**".

La fonction $\arctg(\omega/\omega_z)$ peut être approximée par des segments:

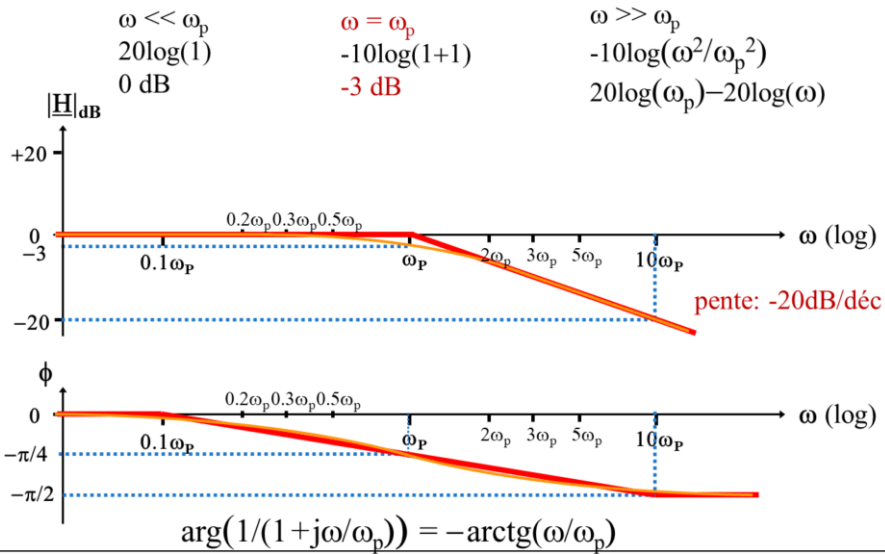
$$\arctg(\omega/\omega_z) \approx 0 \text{ pour } \omega < \omega_z/10$$

$$\arctg(\omega/\omega_z) \approx +\pi/2 \text{ pour } \omega > 10\omega_z$$

$$\arctg(\omega/\omega_z) \approx (1 + \log_{10}(\omega/\omega_z)) \pi/4 \text{ pour } 0.1\omega_z < \omega < 10\omega_z$$

DIAGRAMME DE BODE D'UN TERME $1/(1+j\omega/\omega_p)$

$$20 \log |1/(1+j\omega/\omega_p)| = -20 \log \sqrt{1^2 + \omega^2/\omega_p^2} = -10 \log (1^2 + \omega^2/\omega_p^2)$$



Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 44

ω_p est une constante positive.

Pour $\omega < \omega_p$, $|1/(1+j\omega/\omega_p)| \approx 1$, soit une demi droite à 0 dB à gauche de ω_p .

Pour $\omega > \omega_p$, $|1/(1+j\omega/\omega_p)| \approx |1/(j\omega/\omega_p)|$, soit une demi droite partant de 0 dB en ω_p et descendant de 20dB/décade pour ω croissant.

Ces demi-droites sont appelées asymptotes. La courbe réelle suit assez fidèlement les asymptotes avec un écart maximal de -3 dB en ω_p . La pulsation du point de changement de pente des asymptotes est dite **fréquence de "coupure"**.

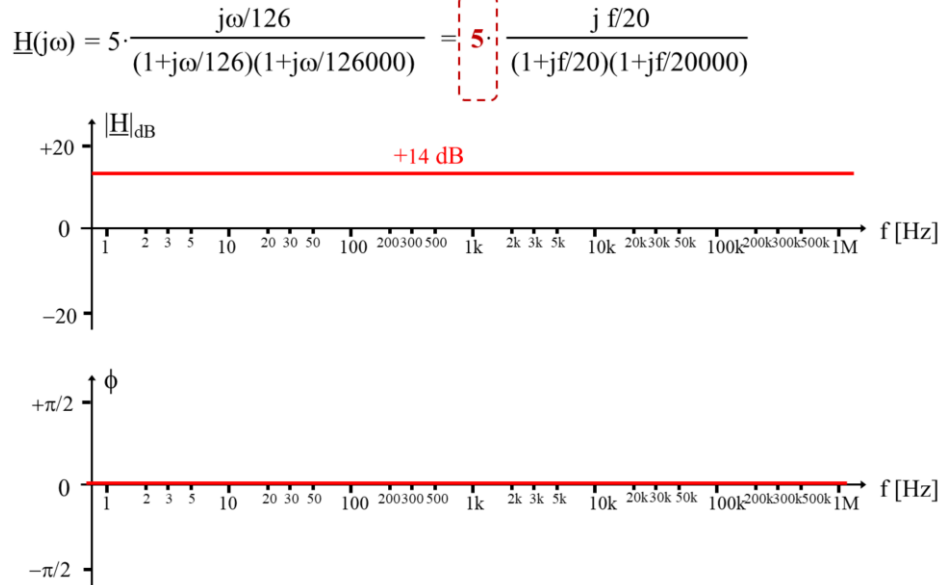
La fonction $-\arctg(\omega/\omega_p)$ peut être approximée par segments appelés asymptotes:

$$-\arctg(\omega/\omega_p) \approx 0 \text{ pour } \omega < \omega_p/10$$

$$-\arctg(\omega/\omega_p) \approx -\pi/2 \text{ pour } \omega > 10\omega_p$$

$$-\arctg(\omega/\omega_p) \approx -(1 + \log_{10}(\omega/\omega_p)) \pi/4 \text{ pour } 0.1\omega_p < \omega < 10\omega_p$$

DIAGRAMME DE BODE, EXEMPLE 1, CONSTRUCTION



Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 45

On remarque tout d'abord que les **abscisses sont graduées en Hz** et non en radians/s, car dans la pratique on s'intéresse à la fréquence plutôt qu'à la pulsation.

La première étape consiste donc à transformer la fonction de transfert et faire apparaître la fréquence, sachant que:

$$j \frac{\omega}{\omega_c} = j \frac{2\pi f}{2\pi f_c} = j \frac{f}{f_c} \text{ où } f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$$

Puis on trace les asymptotes du diagramme de Bode pour chacun des termes.

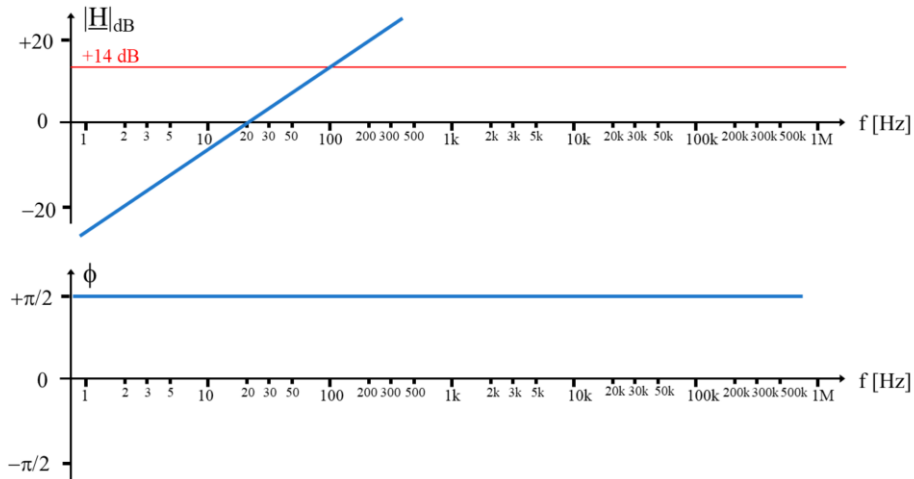
Concernant la constante $K = 5$:

l'amplitude est constante et égale à $20\log_{10}(5) = +14 \text{ dB}$.

La phase est nulle, donc le facteur multiplicatif K sera sans influence sur la phase totale.

DIAGRAMME DE BODE, EXEMPLE 1, CONSTRUCTION

$$\underline{H}(j\omega) = 5 \cdot \frac{j\omega/126}{(1+j\omega/126)(1+j\omega/126000)} = 5 \cdot \frac{jf/20}{(1+jf/20)(1+jf/20000)}$$



Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 46

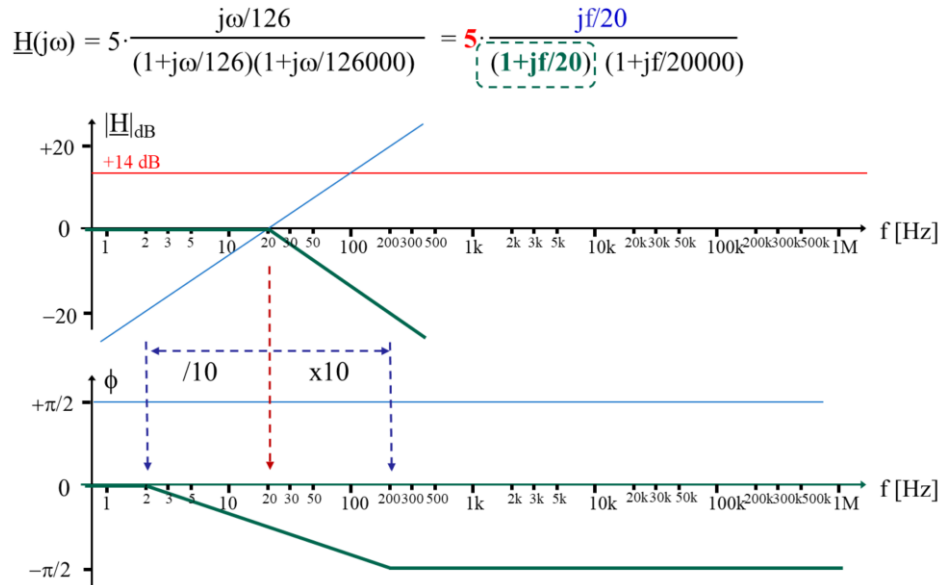
Le terme en $j f/20$ au numérateur :

l'amplitude est une droite croissante de 20 dB/décade.

Elle passe par 0 dB à 20 Hz (0 dB représente un gain de 1, ce qui est bien le module du nombre $j 20/20 = j$),

Le terme $j f/20$ est un nombre imaginaire pur. Sa phase est égale à $+\pi/2$.

DIAGRAMME DE BODE, EXEMPLE 1, CONSTRUCTION



Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 47

Analyse du terme $1+jf/20$ du dénominateur.

Approximation pour tracer l'amplitude.

Le module de ce nombre varie avec la fréquence, mais pour simplifier le tracé (on rappelle que l'échelle est logarithmique), on va faire l'approximation suivante:

Pour $f < 20$ Hz, le terme imaginaire est négligé. Le module de $1+jf/20$ sera donc approximé à 1, $1 + jf/20 \cong 1$.

Ceci revient à dire que l'amplitude sera constante et égale à 0 dB jusqu'à 20 Hz.

Au-delà de 20 Hz, on va considérer que c'est la partie imaginaire qui domine, $1 + jf/20 \cong jf/20$.

Dans ce cas, l'amplitude va diminuer de 20 dB/décade (car le terme est au dénominateur)

Approximation pour la phase.

La phase est plus 'sensible' à la fréquence que le 'module', d'autant plus qu'on la représente sur une échelle linéaire.

Pour les fréquences $f < \frac{1}{10} 20$, on va approximer $1 + j f / 20 \cong 1$, et la phase sera donc nulle jusqu'à $\frac{1}{10} 20$ Hz.

Pour les fréquences $f > 10 * 20$, on va approximer $1 + j f / 20 \cong j f / 20$ et la phase sera donc de $-\pi/2$ au-delà de $10 * 20$ Hz.

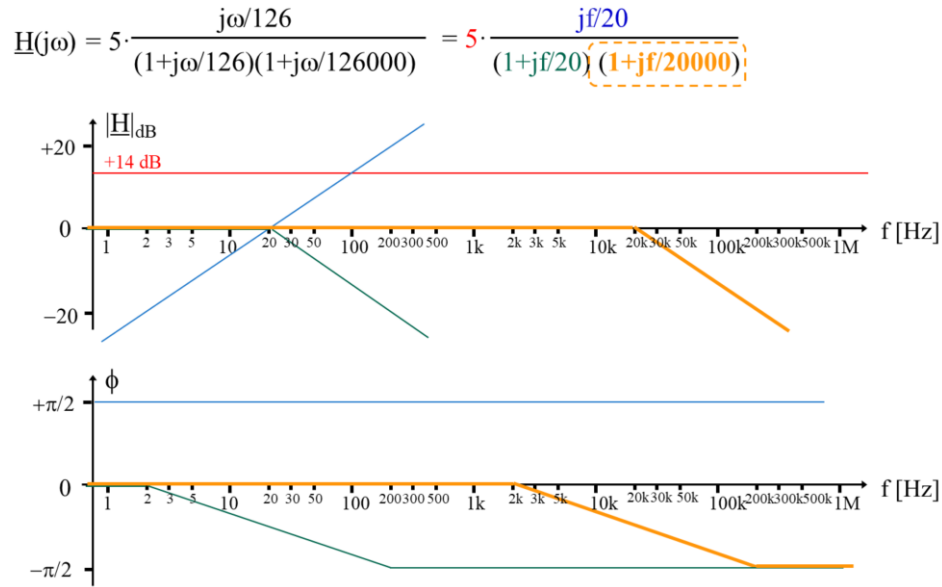
Entre les 2 décades, $\frac{1}{10} 20 < f < 10 * 20$, on peut admettre (approximation) que la phase diminue **linéairement**, variant de 0 à $-\pi/2$ (soit une variation de $\pi/4$ par décade).

Pour la valeur particulière $f = 20\text{Hz}$, on a $1 + j f / 20 = 1 + j$.

Dans ce cas la phase sera de $-\pi/4$ (le signe – vient du fait que le terme est au dénominateur).

L'amplitude sera $\text{Log}(1/|1 + j|) = -3\text{dB}$

DIAGRAMME DE BODE, EXEMPLE 1, CONSTRUCTION



Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 48

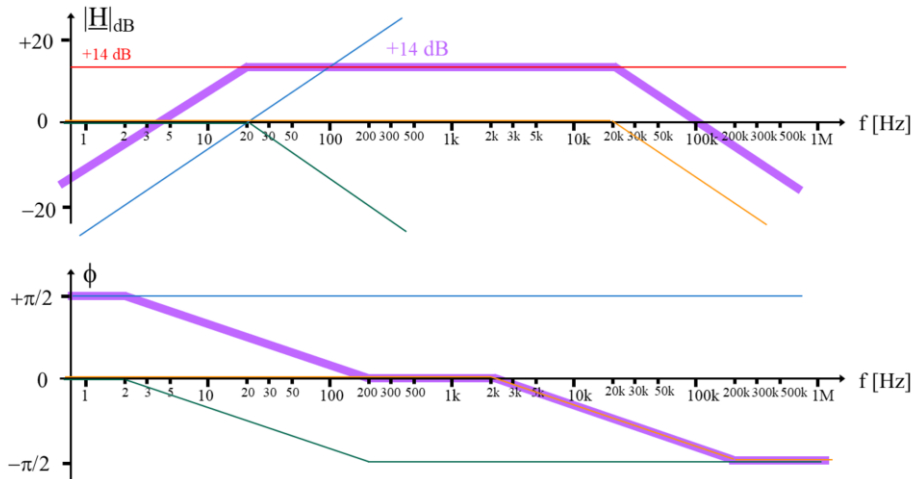
L'autre terme du dénominateur $1+jf/20'000$ se traite de la même manière.

L'amplitude est constante et égale à 0 dB jusqu'à 20 kHz, puis diminue linéairement de 20 dB/décade à partir de 20 kHz,

La phase est constante et nulle jusqu'à $0.1 \cdot 20$ kHz, puis diminue linéairement de $\pi/2$ sur deux décades (ou $\pi/4$ par décade) pour atteindre $-\pi/2$ à $10 \cdot 20$ kHz, et finalement rester constante à $-\pi/2$ au delà de $10 \cdot 20$ kHz.

DIAGRAMME DE BODE, EXEMPLE 1, CONSTRUCTION

$$\underline{H}(j\omega) = 5 \cdot \frac{j\omega/126}{(1+j\omega/126)(1+j\omega/126000)} = 5 \cdot \frac{jf/20}{(1+jf/20)(1+jf/20000)}$$



Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 49

Nous avons à présent la contribution des différents termes pour l'amplitude (en dB, attention !) et la phase.

Pour obtenir la représentation de $H(j\omega)$, il suffit à présent d'additionner les courbes relatives à chacun des termes.

En amplitude:

Jusqu'à 20 Hz les courbes verte et orange sont à 0dB, la droite bleue a une pente +20 dB/décade et la constante rouge ajoute 14 dB quelque soit la fréquence.

La somme de ces 3 courbes donne une droite 'violette' de pente +20 dB/décade située 14 dB au dessus de la bleue.

Mais au delà de 20 Hz, la droite verte a une pente -20 dB/décade, ce qui va 'infléchir' la courbe violette qui devient horizontale. Dans notre cas, elle se confondra avec la courbe rouge (de la constante).

Au delà de 20 kHz, la courbe orange a une pente -20 dB/décade.

La somme de la courbe violette et de la droite orange de pente -20 dB/décade infléchi à nouveau la courbe violette qui aura alors une pente de -20 dB/décade.

A noter que **la courbe de Bode en amplitude est toujours continue.**

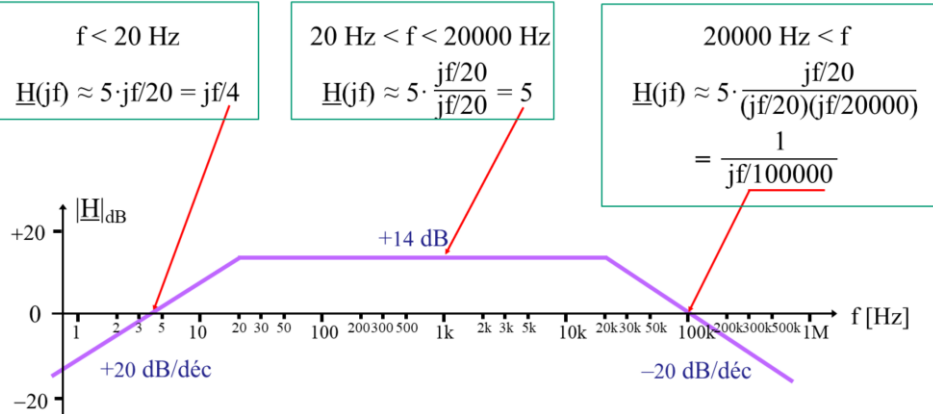
En phase :

Jusqu'à 200 Hz la courbe orange étant nulle, l'addition de la verte et de la constante bleue donne une courbe identique à la bleue, mais décalée de $+\pi/2$. A partir de 200 Hz, la somme de la bleue et de la verte est nulle, et seule reste donc l'orange à laquelle la courbe finale se superpose.

Notez que **la courbe de Bode en phase est toujours continue.**

DIAGRAMME DE BODE, EXEMPLE 1, AUTRE MÉTHODE

$$\underline{H}(j\omega) = 5 \cdot \frac{j\omega/126}{(1+j\omega/126)(1+j\omega/126000)} = 5 \cdot \frac{jf/20}{(1+jf/20)(1+jf/20000)}$$



Cette méthode simple ne permet pas de tracer le diagramme de Bode en phase avec une précision acceptable.

Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 50

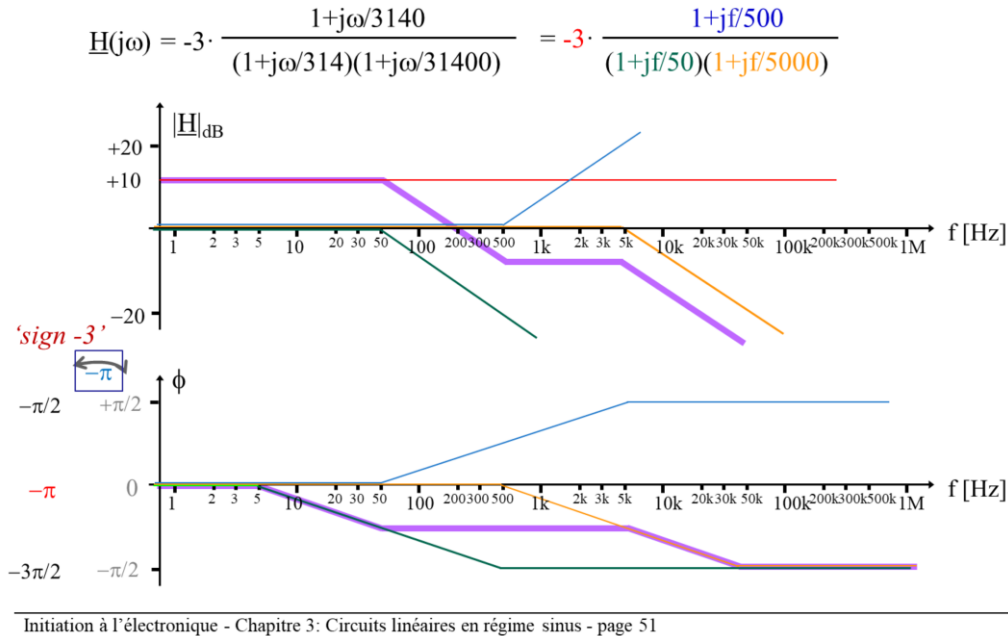
Une méthode alternative consiste à **simplifier la fonction de transfert par morceau** en considérant que :

$$1 + jf/f_c \approx 1 \quad \text{lorsque } f < f_c \quad \text{et} \quad 1 + jf/f_c \approx jf/f_c \quad \text{lorsque } f > f_c$$

Pour la phase cette méthode donne une approximation trop grossière.

En effet, une fois simplifiée, $\underline{H}$ apparaît toujours soit purement réelle, soit purement imaginaire, ce qui donne une phase qui ne peut prendre que trois valeurs discrètes: $-\pi/2$, 0 et $+\pi/2$.

DIAGRAMME DE BODE, EXEMPLE 2



Les asymptotes des diagrammes de Bode des termes simples sont tracées selon les règles présentées précédemment.

Ensuite les courbes sont additionnées.

Pour l'amplitude:

Jusqu'à 50 Hz, seule la constante (3) qui donne +10 dB est non nulle.

De 50 Hz à 500 Hz, +10 dB (rouge) -20 dB/décade (vert), à 500 Hz cela donne +10 -20 = -10 dB.

De 500 Hz à 5 kHz, -10 dB -20 dB/décade (vert) +20 dB/décade (bleu) = -10 dB constant.

Au delà de 5 kHz, -10 dB -20 dB/décade (vert) +20 dB/décade (bleu) -20 dB/décade (orange) = -10 dB -20 dB/décade.

Pour la phase:

Dans un premier temps, on ne tient pas compte du signe - de la constante K.

Jusqu'à 50 Hz, tout est nul.

De 50 Hz à 500 Hz, 0 -π/4 par décade (vert). A 500 Hz on arrive à -π/4.

De 500 Hz à 5 kHz, -π/4 -π/4 par décade (vert) +π/4 par décade (bleu) = -π/4 constant.

De 500 Hz à 5 kHz, -π/4 +π/4 par décade (bleu) -π/4 par décade (orange) = -π/4 constant.

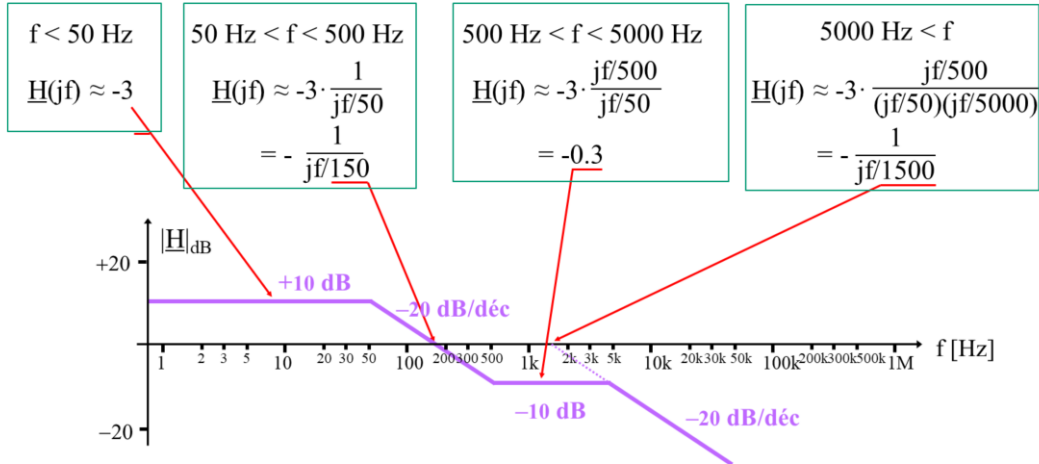
De 5 kHz à 50 kHz, -π/4 -π/4 par décade (orange). A 50 kHz on arrive à -π/2.

Au delà de 50 kHz, -π/2 (vert) +π/2(bleu) -π/2(orange) = -π/2 constant.

Le signe - de la constante K implique un décalage de ±π que l'on applique en modifiant l'échelle en ordonnée.

DIAGRAMME DE BODE, EXEMPLE 2, AUTRE MÉTHODE

$$\underline{H}(j\omega) = -3 \cdot \frac{1+j\omega/3140}{(1+j\omega/314)(1+j\omega/31400)} = -3 \cdot \frac{1+jf/500}{(1+jf/50)(1+jf/5000)}$$

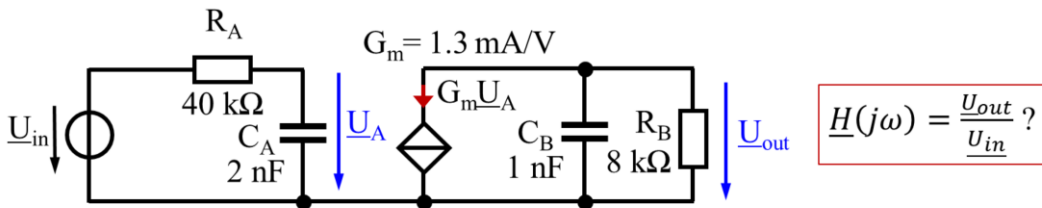


Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 52

La méthode alternative consiste à simplifier la fonction de transfert par morceau en considérant que :

$$1+jf/f_c \approx 1 \quad \text{lorsque } f < f_c \quad \text{et} \quad 1+jf/f_c \approx jf/f_c \quad \text{lorsque } f > f_c$$

DIAGRAMME DE BODE, EXEMPLE 3



$$\underline{U}_A = \frac{\underline{Z}_{C_A}}{\underline{Z}_{C_A} + \underline{Z}_{R_A}} \cdot \underline{U}_{in}$$

$$\underline{U}_{out} = -(\underline{Z}_{C_B} // \underline{Z}_{R_B}) \cdot \underbrace{G_m \underline{U}_A}_{\text{Courant imposé par la source}}$$

$$\underline{U}_{out} = -\frac{\underline{Z}_{C_B} \cdot \underline{Z}_{R_B}}{\underline{Z}_{C_B} + \underline{Z}_{R_B}} \cdot G_m \cdot \frac{\underline{Z}_{C_A}}{\underline{Z}_{C_A} + \underline{Z}_{R_A}} \cdot \underline{U}_{in}$$

$$H(j\omega) = -\frac{\frac{1}{j\omega C_B} R_B}{\frac{1}{j\omega C_B} + R_B} G_m \frac{\frac{1}{j\omega C_A}}{\frac{1}{j\omega C_A} + R_A} = -G_m R_B \frac{1}{(1 + j\omega R_B C_B)(1 + j\omega R_A C_A)}$$

Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 54

Ce circuit fait intervenir une source de courant qui est commandée par la source de tension $\underline{U}_A$.

Le gain est G_m .

On cherche la relation entre $\underline{U}_{out}$ et $\underline{U}_{in}$, c'est-à-dire la fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{out}}{\underline{U}_{in}}$$

Etant donné qu'il y a des capacités, on s'attend à ce que la réponse dépende de la fréquence.

Dans un premier temps on cherche la relation entre les phaseurs $\underline{U}_A$ et $\underline{U}_{in}$, et ensuite la relation entre $\underline{U}_{out}$ et $\underline{U}_A$

DIAGRAMME DE BODE, EXEMPLE 3

$$\underline{H}(j\omega) = -10 \cdot \frac{1}{(1+j\omega/125000)(1+j\omega/12500)} = -10 \cdot \frac{1}{(1+jf/20000)(1+jf/2000)}$$

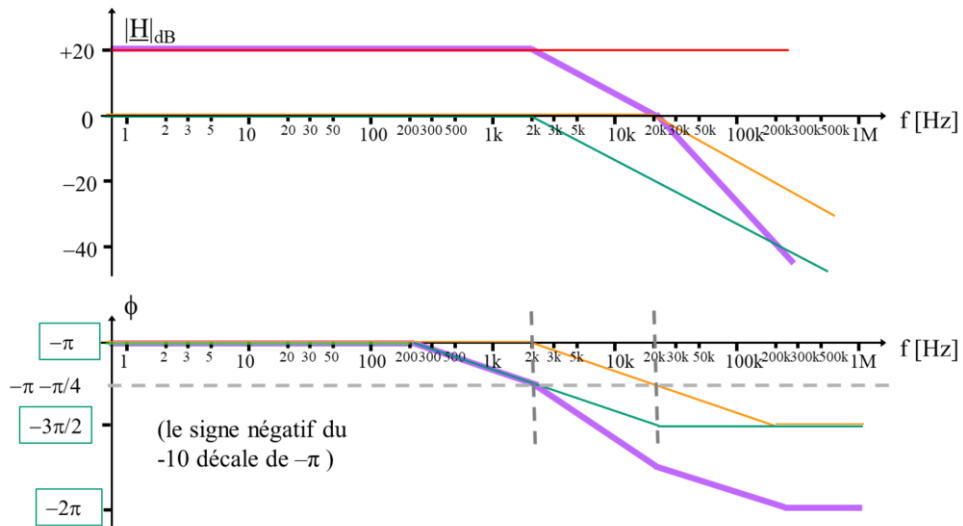
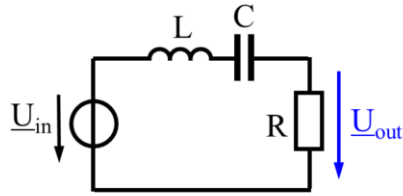


DIAGRAMME DE BODE, EX. 4, FILTRE PASSE-BANDE RLC



$$H(j\omega) = \frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{Z_R}{Z_L + Z_C + Z_R}$$

$$H(j\omega) = \frac{R}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC} = \frac{j\omega / \omega_3}{(1 + j\omega / \omega_1)(1 + j\omega / \omega_2)}$$

ω_1 et ω_2 sont les zéros du dénominateur.

Selon que les pôles $j\omega_1$ et $j\omega_2$ sont réels ou complexes, on aura des comportements différents.

$$j\omega_{1,2} = \frac{-RC \mp \sqrt{R^2 C^2 - 4LC}}{2LC}$$

et $\omega_3 = \frac{1}{RC}$

Remarque : $H\left(\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right) = 1$

Critère de transition entre pôles réels et complexes: $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Rappel sur les polynômes de degré 2.

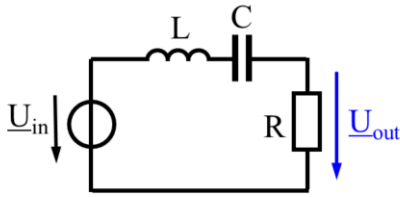
$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2) = ax_1x_2(1-x/x_1)(1-x/x_2) = c(1-x/x_1)(1-x/x_2)$$

où x_1 et x_2 sont les zéros du polynôme.

DIAGRAMME DE BODE, EX. 4, FILTRE PASSE-BANDE RLC

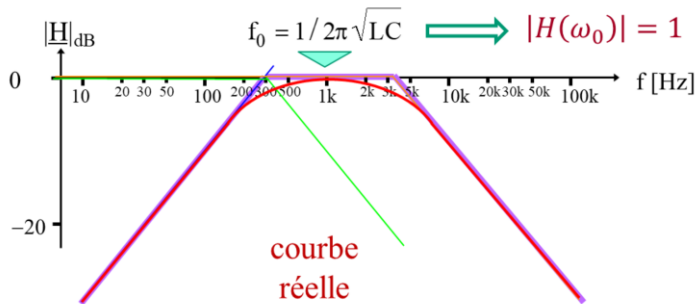
Pôles en $j\omega$ 'réels':

$$R = 8 \, \Omega, \, L = 0.36 \, \text{mH}, \, C = 70 \, \mu\text{F} \Rightarrow R = 8 > 2 \sqrt{\frac{L}{C}} \cong 2,26$$



$$\underline{H}(j\omega) \approx \frac{j\omega/1800}{(1+j\omega/2000)(1+j\omega/20000)}$$

$$\underline{H}(jf) \approx \frac{jf/290}{(1+jf/320)(1+jf/3200)}$$



Les zéros du dénominateur (pôles de H) sont réels et négatifs.

$\omega_0 = 6324 \, \text{rad/s}$, $Q \approx 0.3$
circuit fortement amorti.

Les valeurs choisies donnent une fonction de transfert avec des pôles réels et négatifs.

On peut utiliser la méthode décrite précédemment pour tracer le diagramme de Bode.

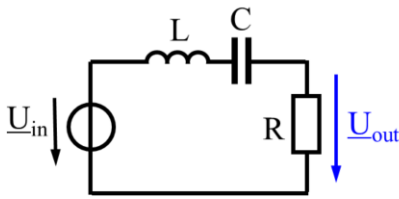
Compte tenu de la valeur de la résistance, le facteur de qualité Q est supérieur à $\frac{1}{2}$.
Les oscillations du circuit seront fortement amorties.

DIAGRAMME DE BODE, EX. 4, FILTRE PASSE-BANDE RLC

Pôles en $j\omega$ 'complexes'

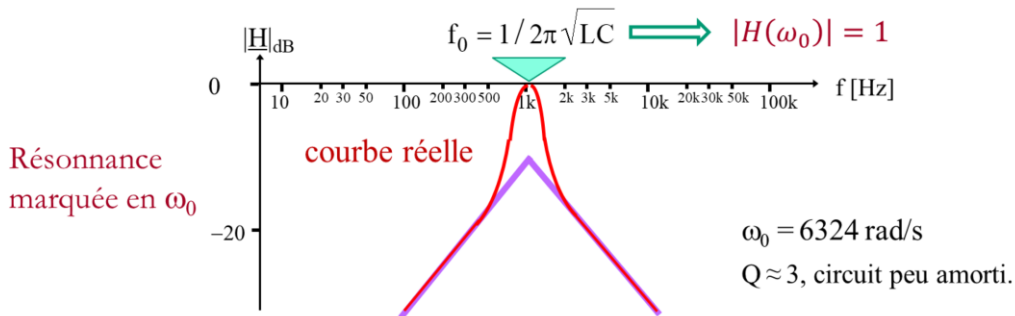
$R = 8 \Omega$, $L = 4 \text{ mH}$, $C = 6.3 \mu\text{F}$

$$\Rightarrow R = 8 < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \cong 25$$



$$\underline{H}(j\omega) \approx \frac{j\omega / 2 \cdot 10^4}{1 + j\omega / 2 \cdot 10^4 + (j\omega)^2 / 4 \cdot 10^7}$$

Les zéros du dénominateur sont **conjugués complexes** : la méthode de Bode n'est plus applicable (calcul 'précis' nécessaire)



Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 58

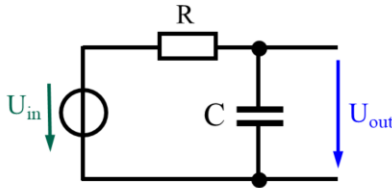
Les valeurs des composants choisis donnent des pôles conjugués complexes.
 Le facteur de qualité Q s'avère être inférieur à $\frac{1}{2}$.

Dans ce cas les pôles de $\underline{H}$ (les zéros du dénominateur) ne sont pas réels, mais conjugués complexes.

La fonction de transfert ne peut donc pas s'écrire sous forme d'un produit de terme du 1^{er} degré.

Les asymptotes du diagramme de Bode ne peuvent pas être tracées selon la méthode simple présentée dans ce chapitre.

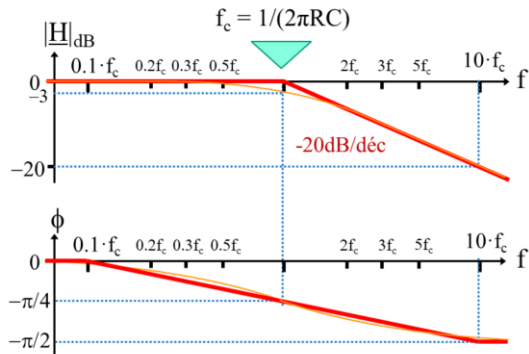
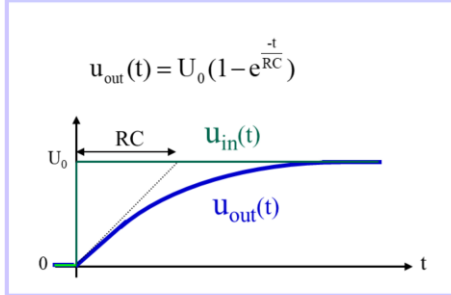
RÉPONSES FRÉQUENTIELLE ET INDICIELLE DU CIRCUIT RC PASSE-BAS D'ORDRE 1



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{U_{out}(j\omega)}{U_{in}(j\omega)} = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega/2\pi f_c}$$

Rappel: réponse indicielle

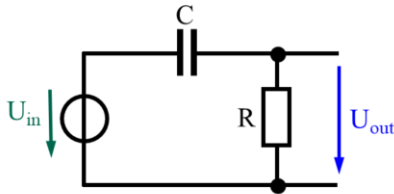


Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 59

Le terme passe-bas vient du fait que ce circuit laisse passer les composantes spectrales de fréquence plus basse que la fréquence de coupure f_c et atténue les composantes spectrales de fréquences supérieures.

Dans le cas d'un saut indicel en entrée, la composante continue U_0 qui correspondrait à une fréquence nulle est intégralement transmise à long terme, alors que le brusque saut, qui correspondrait à une fréquence infinie, n'est pas transmis.

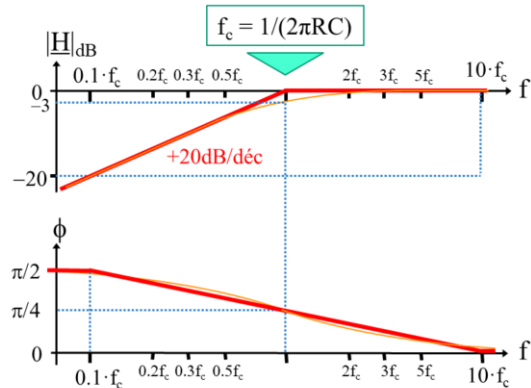
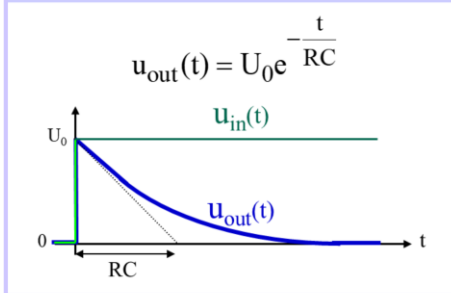
RÉPONSES FRÉQUENTIELLE ET INDICIELLE DU CIRCUIT RC PASSE-HAUT D'ORDRE 1



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{U_{out}(j\omega)}{U_{in}(j\omega)} = \frac{Z_R}{Z_R + Z_C}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R}{R + 1/j\omega C} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j\omega/2\pi f_c}{1 + j\omega/2\pi f_c}$$

Rappel: réponse indicielle



Initiation à l'électronique - Chapitre 3: Circuits linéaires en régime sinus - page 60

Le terme passe-bas vient du fait que ce circuit laisse passer les composantes spectrales de fréquences plus haute que la fréquence de coupure f_c alors les composantes spectrales de fréquence inférieure à f_c sont atténuées.

Dans le cas d'un saut indiciel en entrée, le brusque saut qui correspondrait à une fréquence infinie est intégralement transmis, alors que la composante continue U_0 qui correspondrait à une fréquence nulle n'est pas transmise, mais éliminée à long terme.